

ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. П. Н. ЛЕБЕДЕВА
АСТРОКОСМИЧЕСКИЙ ЦЕНТР

На правах рукописи
УДК 524.7-52; 524.827; 524.882

Ткачев Максим Вячеславович

**Моделирование наблюдательных проявлений темной
материи**

Специальность 01.03.02 —
«Астрофизика, радиоастрономия»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
канд. физ.-мат. наук
Пилипенко Сергей Владимирович

Москва — 2021

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Список сокращений и условных обозначений	19
Словарь терминов	20
Список рисунков	21
Список таблиц	26
Глава 1. Моделирование гало темной материи: проверка энтропийного подхода к проблеме каспов	27
1.1 Введение	27
1.2 Энтропийный подход	30
1.3 Измерение фоновой энтропии	33
1.4 Численный эксперимент	34
1.5 Результаты	37
1.6 Заключение	40
Глава 2. Модель инфракрасного фона неба, созданного далекими галактиками	42
2.1 Введение	42
2.2 Классификация моделей ИКФ	43
2.3 Описание модели	46
2.3.1 Требования к модели	46
2.3.2 Конус, свойства гало и крупномасштабная структура	47
2.3.3 Гравитационное линзирование	49
2.3.4 Определение светимостей галактик	51
2.3.5 Спектры галактик	53
2.3.6 Сравнение с наблюдениями обсерватории ALMA	53
2.4 Практическое применение модели	54
2.4.1 Выделение точечных источников и предел путаницы	54

2.4.2	Крупномасштабная структура	57
2.5	Заключение	58
Глава 3. Первичные Черные Дыры в Ранней Вселенной:		
	Симуляции Темной Материи	60
3.1	Введение	60
3.2	Методы	61
3.3	Численные модели N тел с Первичными Черными Дырами	64
3.4	Формирование и устойчивость пар ПЧД	68
3.4.1	Длина Сглаживания	71
3.4.2	Численные ошибки схемы интегрирования	75
3.4.3	Вириализация Материи	76
3.5	$f_{РВН} < 1.0$: Слияния пар ПЧД	81
3.6	Выводы	85
	Заключение	87
	Список литературы	89

Введение

В последние годы космология продемонстрировала значительный успех в определении средних параметров Вселенной. По результатам обработки данных об анизотропии реликтового излучения, полученных спутниками WMAP и Planck, в комбинации с данными по сверхновым Ia и барионным акустическим осцилляциям в каталогах галактик, с хорошей точностью определен состав Вселенной и скорость её расширения [4; 5], [6; 7]. Таким образом, в космологии разработана “стандартная модель” Вселенной, включающая в себя барионное вещество, холодную тёмную материю и тёмную энергию.

Подавляющее большинство обычного вещества во Вселенной невидимо, поскольку видимые звезды и газ внутри галактик и скоплений составляют менее 10% вклада обычного вещества в плотность массы-энергии Вселенной [8]. По этой причине принято считать, что во Вселенной в изобилии присутствует Темная Материя (ТМ) и что она оказала и до сих пор оказывает сильное влияние на ее структуру и эволюцию. Основное свидетельство возможного существования ТМ было получено из расчетов, показывающих, что многие галактики разлетелись бы или что они не сформировались бы или не двигались бы так, как они это делают, если бы они не содержали большого количества невидимой материи. Другие доказательства включают наблюдения явлений гравитационного линзирования [9] и наблюдения космического микроволнового фона (СМВ)¹ или «реликтового излучения», наряду с астрономическими наблюдениями текущей структуры наблюдаемой Вселенной, образования и эволюции галактик, положения масс во время галактических столкновений и движения галактик в скоплениях. Поскольку темная материя еще не наблюдалась напрямую, если она существует, она едва ли должна взаимодействовать с обычной барионной материей и излучением, кроме как посредством гравитации. Тем не менее, существует достаточно много косвенных наблюдательных проявлений темной материи. Вот некоторые из них:

1. Кривые вращения галактик

Рукава спиральных галактик вращаются вокруг галактического центра. Плотность светящейся массы спиральной галактики уменьшается

¹СМВ — Cosmic Microwave Background — космический микроволновый фон

по мере продвижения от центра к краям. Из Второго закона Кеплера ожидается, что скорости вращения будут убывать с удалением от центра. Однако, этого не наблюдается [10]. Вместо этого кривая вращения галактики остается плоской по мере увеличения расстояния от центра. Если законы Кеплера верны, то очевидный способ устранить это несоответствие - сделать вывод, что распределение массы в спиральных галактиках не похоже на распределение массы в Солнечной системы — в частности, на окраинах галактики много несветящейся материи (темной материи).

2. Дисперсии скоростей звезд в связанных системах

Звезды в связанных системах должны подчиняться теореме вириала. То есть для стабильной системы связанной потенциальными силами в общем случае должно выполняться соотношение:

$$2\langle T \rangle = - \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{r}_k \rangle$$

где $\langle T \rangle$ представляет среднюю полную кинетическую энергию и \mathbf{F}_k — сила, действующая на k -ю частицу.

Теорема вместе с измеренным распределением скоростей может использоваться для измерения распределения массы в связанной системе, такой как эллиптические галактики или шаровые скопления. За некоторыми исключениями, оценки дисперсии скоростей эллиптических галактик [11] не совпадают с предсказанной дисперсией скоростей по наблюдаемому распределению масс, даже при допущении сложных распределений звездных орбит [12].

Как и в случае с кривыми вращения галактик, очевидный способ устранить несоответствие - постулировать существование несветящейся материи.

3. Гравитационное линзирование

Одно из следствий общей теории относительности - массивные объекты (например, скопления галактик), лежащие между более удаленным источником (например, квазаром) и наблюдателем, должны действовать как линзы, отклоняющие свет от этого источника. Чем массивнее объект, тем сильнее свет отклоняется от прямой траектории. В кон-

тексте данной работы нас особенно интересует сильное гравитационное линзирование. Сильное гравитационное линзирование - это эффект гравитационного линзирования, который достаточно силен для создания множественных изображений, дуг или даже колец. Для точечных фоновых источников возникает несколько изображений; для протяженных источников могут возникать дуги или кольца. Этот эффект наблюдался вокруг многих далеких скоплений, включая Abell 1689. [13] Изучая геометрию искажения, можно получить массу скопления. В десятках случаев, когда это было сделано, полученные отношения массы к светимости соответствовали динамическим измерениям массы темной материи кластеров [14].

4. Реликтовое излучение

Хотя и темная материя, и обычная материя являются материей, они ведут себя по-разному. В частности, в ранней Вселенной обычная материя была ионизирована и сильно взаимодействовала с излучением через томсоновское рассеяние. Темная материя не взаимодействует напрямую с излучением, но влияет на реликтовое излучение своим гравитационным потенциалом (в основном в больших масштабах) и своим влиянием на плотность и скорость обычной материи. Следовательно, возмущения обычной и темной материи по-разному развиваются со временем и оставляют разные отпечатки на фоне реликтового излучения (СМВ).

Космический микроволновый фон очень близок к идеальному черному телу, но содержит очень небольшую анизотропию температуры величиной в несколько частей на 100000. Карта неба с анизотропией может быть разложена на угловой спектр мощности, который, как наблюдается, содержит серию акустических пиков на примерно равном расстоянии, но разной высоте. Последовательность пиков может быть предсказана для любого предполагаемого набора космологических параметров с помощью линейной теории роста возмущений (см, например, СМБFAST [15], CLASS [16]), и поэтому теория сопоставления с данными ограничивает космологические параметры. Первый пик в основном показывает плотность барионной материи, а третий пик в основном относится к плотности темной материи.

Анизотропия реликтового излучения достаточно точно наблюдалась WMAP в 2003–2012 годах, а еще точнее - космическим аппаратом Planck в 2013–2015 годах. Результаты подтверждают модель Λ CDM [4; 5], [7]

Наблюдаемый угловой спектр мощности реликтового излучения является убедительным свидетельством в поддержку темной материи, поскольку его структура хорошо согласуется с моделью Λ CDM [7], при этом ее трудно воспроизвести с помощью любой конкурирующей модели, такой как модифицированная ньютоновская динамика (MOND) [17].

Темная материя классифицируется как «горячая», «теплая» или «холодная» — в зависимости от средней скорости ее частиц. Таким образом, горячая темная материя должна состоять из релятивистских или даже ультрарелятивистских частиц, для которых величина полной энергии значительно превышает энергию покоя. В качестве таких частиц, например, подходят нейтрино [18]. Однако, современные модели отдают предпочтение сценарию холодной темной материи, в котором структуры возникают в результате постепенного накопления частиц, приводящему к образованию галактик, а затем и скоплений галактик — тогда как горячая темная материя предполагает обратный сценарий, где большие скопления материи формируются на ранней стадии, а затем фрагментируются на отдельные галактики [19]. Кандидаты в холодную ТМ условно можно поделить на три категории:

1. **WIMP-ы** — слабо взаимодействующие массивные частицы (*weakly interacting massive particles*). В настоящее время до сих пор не обнаружено частицы с требуемыми свойствами, но многие расширения стандартной модели физики элементарных частиц предсказывают такие частицы [20]. Поиск WIMP-ов включает попытки прямого обнаружения высокочувствительными детекторами, а также попытки создания WIMP на ускорителях частиц. Вимпы обычно считаются одними из самых многообещающих кандидатов в состав темной материи [21; 22].
2. **Аксионы** — очень легкие частицы с особым типом самовзадействия, что делает их подходящим кандидатом в холодную ТМ [23—25]. Обнаружение аксионов могло бы решить не только проблему ТМ, но и так называемую проблему сильного CP-нарушения в квантовой

хромодинамике [26], однако до сих пор частица пока экспериментально не обнаруживалась. Аксионы являются примером категории частиц, называемых WISP (*weakly interacting sub-eV particles* — слабо взаимодействующие частицы субэлектронвольтных масс), которые являются маломассивными аналогами WIMP.

3. **МАСНО** — Массивные компактные объекты гало (*Massive compact halo object*). Объекты, такие как черные дыры, нейтронные звезды, белые карлики, очень слабые звезды или несветящиеся объекты, например планеты [27]. Поиск этих объектов заключается в использовании гравитационного линзирования для обнаружения воздействия этих объектов на фоновые галактики. Большинство экспертов считают, что ограничения, связанные с этими поисками, исключают МАСНО как жизнеспособного кандидата на темную материю [28; 29].

В марте 2016 года, через месяц после объявления об обнаружении гравитационных волн группой LIGO / VIRGO [30], излучаемых при слиянии двух черных дыр массой 30 солнечных масс (около 6×10^{31} кг), три группы исследователей независимо друг от друга предположили, что обнаруженные черные дыры могут иметь первичное происхождение [31—33]. Если это так, то такие объекты могут составлять некоторую или даже значительную долю темной материи. **Первичные черные дыры** (ПЧД) - это гипотетический тип черных дыр, образовавшийся вскоре после Большого взрыва. В этих условиях простые колебания плотности материи могли быть достаточно значительными, чтобы способствовать возникновению чёрных дыр. Я.Б. Зельдович и И.Д. Новиков в 1966 году впервые высказали предположение о существовании таких черных дыр [34]. Теория, лежащая в основе их происхождения, была впервые подробно изучена Стивеном Хокингом в 1971 г [35]. С тех пор ПЧД неоднократно предлагались в качестве возможного кандидата на роль ТМ (см. например [36—38]). Две группы обнаружили, что скорости слияния, полученные с помощью LIGO, согласуются со сценарием, в котором вся темная материя состоит из ПЧД [31; 32], если значимая их часть каким-то образом сгруппирована в гало, таких как тусклые карликовые галактики или шаровые скопления, как и ожидалось в стандартной теории образования крупномасштабной структуры. Третья группа утверждала, что эти скорости слияния несовместимы со сценарием, при кото-

ром вся темная материя состоит из ПЧД, и что ПЧД могут составлять менее одного процента от общей темной материи [33].

Одним из важных инструментов, применяемых в современной космологии, является численное моделирование распределения ТМ во Вселенной. Первая попытка численно решить проблему образования и эволюции космологических структур в расширяющейся Вселенной была представлена в известной статье, опубликованной в 1974 году Уильямом Прессом и Полом Шехтером [39]. За этим последовал ряд работ конца 1970-х - начала 1980-х, которые значительно расширили возможности таких усилий (см., например, [40—44]). Во-первых, сочетание увеличения скорости процессоров и более совершенных численных методов впервые позволило одновременно моделировать миллионы частиц. Во-вторых, была разработана теория инфляции [45—48] и развита линейная теория возмущений [49], которые вместе с широко известным приближением Зельдовича (см. [50]) предложили фактические средства, с помощью которых можно было генерировать начальные возмущения плотности, обеспечивая тем самым начальные условия для космологического моделирования. Моделирование крупномасштабной структуры, конечно, полезно только в том случае, если его результаты можно сравнить с реальными структурами, обнаруженными во Вселенной. Это стало возможным благодаря обзору CfA ((*CfA Redshift Survey*)), который был первым обширным трехмерным обзором галактик в локальной Вселенной [51]. Среди других особенностей CfA обнаружил первые признаки «космической паутины», описывающей распределение материи в самых больших масштабах. Этот обзор также выявил наличие значительной структуры в масштабах субкластеров, что противоречит предсказаниям моделирования горячей темной материи [19; 52]. Первые трехмерные симуляции холодной темной материи были выполнены Марком Дэвисом, Джорджем Эфстатиу, Карлосом Френком и Саймоном Уайтом, которые опубликовали свои результаты в 1985 году [53]. А так же ранее в двумерных расчетах, выполненных А. Г. Дорошкевичем и др. в 1980 году, было продемонстрировано образование ячеистой крупномасштабной структуры [54]. Сходство смоделированного распределения гало темной материи с галактиками в обзоре CfA было очевидным, что еще больше повысило статус холодной темной материи в космологическом сообществе. К середине 1980-х парадигма холодной темной материи уже уверенно утвердилась. И хотя сценарии, включающие смешанную темную материю (содержа-

щую значительные количества как холодной, так и горячей темной материи) и горячую темную материю (подавляющую структуру только в масштабе карликовых галактик и ниже), по-прежнему обсуждались в литературе [55—57], от возможности того, что в темной материи преобладают нейтрино или другие релятивистские частицы быстро отказались.

Десять лет спустя предсказания космологического моделирования сместились с распределения холодных гало темной материи на формы этих гало. В 1996 году Хулио Наварро, Карлос Френк и Саймон Уайт опубликовали результат, основанный на анализе гало, образовавшихся при моделировании холодной темной материи с высоким разрешением [58]. Выведенная авторами простая эмпирическая формула для аппроксимации радиального профиля плотности гало получила название профиля Наварро-Френка-Уайта (см. Главу 1). Эта параметризация все еще широко используется сегодня и представляет собой основной критерий для большинства исследований по обнаружению темной материи, несмотря на то, что ожидается, что она будет неточной во внутренних областях галактик, где барионное вещество вносит доминирующий вклад в гравитационный потенциал. Также следует отметить появление примерно в это же время более эффективных инструментов моделирования статистики космологического спектра мощности, одним из которых стала переходная функция Эзенштейна-Ху [59].

В последние годы область космологического моделирования сосредоточилась на реализации барионной физики, включая гидродинамическую эволюцию газа в астрофизических структурах, звездообразование и обратную связь от взрывов сверхновых и черных дыр. Современные модели все еще не в состоянии разрешить все соответствующие масштабы - которые варьируются от субпарсековых расстояний для звездообразования до масштабов Гигапарсек для космологических структур, - но реализуют барионную физику путем введения подходящих параметров «подсетки», которые пытаются имитировать совокупное поведение большого количества газа и звезд [60]. Такие параметры обычно настраиваются в соответствии с наблюдаемыми величинами, такими как функция масс галактики и соотношение масс галактики и центральной черной дыры, как, например, в недавнем наборе симуляций Eagle [61].

Одним из самых ранних и важных результатов, полученных из космологического моделирования N тел является наличие так называемого «каспа»² в симулируемых гало из холодной ТМ. Под «каспом» подразумевается резкий пик в распределении плотности гало тёмной материи в центральных областях, где плотность значительно увеличивается на малых радиусах. А под связанной с этим термином «проблемой каспов» [62–64]) понимается несоответствие между предполагаемыми профилями плотности темной материи маломассивных галактик и профилями плотности, предсказанными космологическим моделированием N тел. Почти все моделируемые гало холодной ТМ имеют «остроконечные» распределения темной материи с крутым увеличением плотности на малых радиусах, в то время как кривые вращения большинства наблюдаемых карликовых галактик предполагают, что они имеют плоские центральные профили плотности темной материи (т.н. «ядра») [58; 65–69]. Однако, как было показано в численных экспериментах с большим числом частиц (например Aquarius [70]), профиль масс гало Λ CDM незначительно, но систематически отклоняется от формы, предложенной Наварро, Фрэнком и Уайтом — иначе говоря, профили плотности гало холодной темной материи не являются строго универсальными: разные гало, как правило, нельзя масштабировать, чтобы они выглядели одинаково [71].

Было предложено несколько возможных решений проблемы каспов [72–74]. Многие недавние исследования (см, например, [75–77]), показали, что включение барионной обратной связи (особенно обратной связи от сверхновых звезд и активных ядер галактик) может «сгладить» профиль ядра из темной материи, поскольку потоки газа, вызванные обратной связью, создают изменяющийся во времени гравитационный потенциал, который передает энергию бесстолкновительным частицам темной материи [78–80]. Важно отметить, что зависимость профиля от звездной массы галактики в перечисленных работах получается разной, то есть консенсуса по этому вопросу пока нет. Кроме того, есть и работы, в которых утверждается, что обратная связь не разрушает касп, например [81]

Также А.Г. Дорошкевичем, В.Н. Лукашом и Е.В. Михеевой в статьях [67; 82] был рассмотрен так называемый «энтропийный» метод описания вириализованных систем ТМ, который позволил аналитически исследовать эти сложные

²англ. «cusp» — пик

нелинейные структуры и связать внутренние профили плотности ТМ с характеристиками как начального мелкомасштабного поля неоднородностей плотности, так и нелинейной крупномасштабной релаксацией гравитационно-сжатого вещества. Авторами был сделан вывод о том, что космологические случайные движения вещества "подогревают" частицы ТМ в коллапсирующих протогало, и было показано, что учёт этого эффекта: может приводить к подавлению каспоподобных профилей распределения плотности внутри формирующихся гало и образованию «ядер» ТМ в галактиках. Существуют также работы, в которых показано, что проблема каспов может быть решена вне наиболее широко принятой парадигмы холодной темной материи (CDM): моделирование с теплой или самовзаимодействующей темной материей также создает ядра темной материи в галактиках с малой массой [83; 84]

Для предсказаний возможностей новых телескопов также очень важна задача моделирования наблюдений большого числа галактик. Например, для будущей обсерватории «Миллиметрон»³ ([85; 86]) необходимы моделирование наблюдений в дальнем инфракрасном (ИК) диапазоне. Космическое ИК-излучение (или ИК-фон) обычно вызвано межзвездной пылью. Пыль нагревается светом звезд до температуры не более нескольких десятков кельвинов и излучает тепловым образом. Пыль имеется в нашей Галактике, однако ее суммарное излучение сравнительно слабое, около 10^{-4} от ее полной оптической светимости. Есть галактики, в которых пыли так много, что почти все излучение звезд в них перехватывается и переизлучается пылью в дальнем ИК-диапазоне. Такие галактики называют субмиллиметровыми, так как их максимум светимости приходится на длины волн меньше миллиметра [87]. При угловом разрешении, которым обычно обладают одиночные телескопы, предназначенные для наблюдений в дальнем ИК-диапазоне, ИК-фон не разрешается полностью на отдельные источники и состоит из пятен разной яркости. Пространственные флуктуации ИК-фона создают так называемую «проблему путаницы», когда слабые точечные источники не могут быть отделены от пятен, созданных многими далекими галактиками. Данный эффект ограничивает чувствительность фотометрических исследований в дальнем ИК- и субмиллиметровом диапазонах. В то же время, для удаленных галактик должны проявляться эффекты гравитационного линзирования, которые будут приводить к искажению наблю-

³<http://millimetron.ru>

даемой формы этих галактик и потока излучения от них. Поэтому для предсказания влияния эффекта путаницы для будущих наблюдений необходимо создание модели с учетом гравитационного линзирования, способной экстраполировать текущие представления об ИК-фоне в область более высокого разрешения и чувствительности.

Цель данной работы состоит в исследовании того, как свойства темной материи проявляются в строении и распределении галактик, а также в сигналах, полученных с гравитационно-волновых детекторов.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Исследовать и проверить энтропийный подход к проблеме образования гало темной материи и развить идею «энтропийной модели» [67; 82] (**Глава 1**).
2. Разработать метод, позволяющий измерить начальную энтропию темного гало в численных моделях и сравнить ее с предсказаниями теории (**Глава 1**).
3. Построить модель фона созданного далекими галактиками, излучающими в дальнем инфракрасном (ИК) диапазоне (**Глава 2**).
4. Оценить на основе численных моделей образования гало как предсказания модели ИК-фона согласуются с существующими данными о подсчетах источников (**Глава 2**).
5. Проанализировать процессы образования и разрушения гравитационно-связанных пар ПЧД при взаимодействии большого числа ПЧД, а также слияния как связанных, так и несвязанных пар, и оценить вероятность таких событий (**Глава 3**).
6. Оценить влияние численных эффектов моделирования на результат и определить основной фактор разрушения гравитационно-связанных пар (**Глава 3**).

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Путем проведения численных экспериментов образования гало темной материи показано, что касп в гало возникает из областей начального распределения материи, имеющих энтропию на порядок ниже, чем в среднем по Вселенной для случайно выбранной сферы с массой каспа. (**Глава 1**).

2. Построена модель ИК-фона далеких галактик, учитывающая крупномасштабную структуру Вселенной и усиление потоков за счет гравитационного линзирования на галактиках и скоплениях галактик. Модель воспроизводит двумерный спектр мощности карт ИК-фона, измеренный космической обсерваторией Herschel. (**Глава 2**).
3. С использованием серии космологических численных моделей N-тел, которые включали как частицы обычной темной материи, так и переменную долю частиц темной материи (f_{PBH}), состоящей из первичных черных дыр (ПЧД), в диапазоне от $f_{PBH} = 10^{-4}$ до $f_{PBH} = 1.0$ получены оценки темпов формирования, разрушения и слияния пар ПЧД. Показано, что эти оценки хорошо согласуются с ограничениями на содержание ПЧД, полученными другими исследовательскими группами на основе данных LIGO, и соответствуют скорости слияния приблизительно $10^2 \text{ Гпк}^{-3} \cdot \text{год}^{-1}$ для доли ПЧД $f_{PBH} = 10^{-3}$ (**Глава 3**).
4. Обнаружено, что стабильность пар ПЧД, являясь основным фактором, определяющим скорость слияния пар, в значительной степени зависит от процессов образования гало темной материи и кластеризации. Показано, что в гравитационно-связанных объектах пары ПЧД разрушаются быстрее, чем происходит их слияние. Количество гравитационно-связанных образований из ПЧД сильно зависит от доли ПЧД в составе темной материи. (**Глава 3**).

Научная новизна и практическая значимость:

1. Был разработан оригинальный способ оценки «фоновой» энтропии и оценено ее влияние на формирование внутренней структуры гало темной материи. Впервые было показано, что касп в гало возникает из областей начального распределения материи, имеющих энтропию на порядок ниже, чем в среднем по Вселенной (внутри случайно выбранной сферы с массой каспа) Описание метода, а так же последовательность его применения описаны в статье **A1**.
2. Впервые при построении полуаналитической модели ИК-фона неба, были учтены данные космологического расчета крупномасштабной структуры Вселенной, а также получены модельные карты ИК-фона, к которым можно применять различные алгоритмы поиска источников.

Данная модель может быть использована для определения предела путаницы для будущих космических телескопов дальнего ИК-диапазона 10-метрового класса, а также для сравнения кластеризации пиков интенсивности фона с реальной крупномасштабной структурой.

Описание модели и метод построения модельных карт приведены в статье **A2**.

3. Впервые получены оценки темпов формирования, слияния и разрушения пар ПЧД, учитывающие взаимодействие с другими ПЧД и образовавшимися из них структурами. Также впервые было показано, что основным фактором, ответственным за процессы формирования, разрушения и слияния пар ПЧД, является возникновение гравитационно-связанных структур при красных смещениях, примерно соответствующих эпохе равномерного излучения и вещества. В свою очередь, оценки влияния численных эффектов могут оказаться полезными для будущих исследований выполненных данным методом.

Результаты исследования опубликованы в статье **A3**.

Все результаты, представленные в диссертации, выполнены впервые, полученные данные ранее не публиковались и могут быть использованы в перспективе для дальнейших научных исследований.

Достоверность результатов:

Научные положения и выводы диссертационной работы обоснованы, достоверны и получили признание в научной литературе и на различных конференциях.

Апробация работы:

Основные результаты работы докладывались на:

1. XXXII конференции “Актуальные проблемы внегалактической астрономии”

(20.04.2015, г. Пущино, ПРАО АКЦ ФИАН).

Тема: “Эволюция массы и других характеристик гало темной материи.”(М.В. Ткачев, С.В. Пилипенко).

Стендовый доклад.

2. Семинаре отдела теоретической астрофизики АКЦ ФИАН
(22.10.2015, г. Москва, АКЦ ФИАН).
Тема: “Методы моделирования гало темной материи” (М.В. Ткачев, С.В. Пилипенко).
Устный доклад.
3. XXXIII конференции “Актуальные проблемы внегалактической астрономии”
(21.04.2016, г. Пущино, ПРАО АКЦ ФИАН).
Тема: “Моделирование гало темной материи: вариации начальных условий” (М.В. Ткачев, С.В. Пилипенко). Устный доклад.
4. Конференции “Cosmic Clues from the Near Field Universe”
(05.06.2016, г. Хайфа, Израиль, университет “Технион”)
Тема: “Variances of the small scale part of the perturbation spectrum” (М. Tkachev, S. Pilipenko).
Устный доклад.
5. Конференции “Galaxy Clusters 2017”
(03.07.2017, г. Сантандер, Испания).
Тема: “Dark matter halo simulations: verifying entropy approach to the core-cusp problem” (М. Tkachev, S. Pilipenko).
Устный доклад.
6. Конференции “Statistical Challenges in 21-st Century Cosmology”
(22.05.2018, г. Валенсия, Испания).
Тема: “Dark matter halo simulations: verifying entropy approach to the core-cusp problem” (М. Tkachev, S. Pilipenko).
Стендовый доклад.
7. XXXVI конференции “Актуальные проблемы внегалактической астрономии”
(21.04.2019, г. Пущино, ПРАО АКЦ ФИАН).
Тема: “Симуляции темной материи: первичные черные дыры в ранней Вселенной.” (М.В. Ткачев, С.В. Пилипенко).
Устный доклад.
8. Семинаре отдела теоретической астрофизики АКЦ ФИАН
(11.03.2021, г. Москва, АКЦ ФИАН).
Тема: “Dark matter simulations: primordial black holes in the early

universe.” (М.В. Ткачев, С.В. Пилипенко).

Устный доклад.

Публикации и личный вклад:

Основные результаты по теме диссертации изложены в 3 статьях, опубликованных в журналах, рекомендованных ВАК, в том числе одна статья опубликована в высокорейтинговом зарубежном журнале (MNRAS):

1. **A1:** Ткачев М.В., Пилипенко С.В., Карлеси Э.
 “Моделирование гало темной материи: проверка энтропийного подхода к проблеме каспов”
 “Астрономический журнал”, т. 96, №5, стр 374-379, 2019
2. **A2:** С. В. Пилипенко, М. В. Ткачев, А. А. Ермаш, Т. И. Ларченкова, Е. В. Михеева, В. Н. Лукаш
 “Модель инфракрасного фона неба, созданного далекими галактиками”
 “Письма в Астрономический Журнал”, т. 43, №10, стр.715-726, 2017
3. **A3:** Tkachev M. V., Pilipenko S. V., Yepes G.
 "Dark matter simulations with primordial black holes in the early Universe
 Monthly Notices of the Royal Astronomical Society т. 499, № 4. стр.
 4854—4862, 2020

Все статьи, лежащие в основе настоящей работы, написаны в соавторстве, причем вклад диссертанта в работы **A1** и **A3** являлся определяющим. Автор диссертации лично провел следующие работы:

- В работе **A1** автор подготовил начальные условия и выполнил численный расчет образования гало темной материи при помощи инструментов космологического численного моделирования **GADGET-2** [88] и **ginnungagap**. При помощи инструментов для обработки результатов численного моделирования (**ANF**, а также собственных оригинальных кодов на языках **C** и **Python**) автор оценил фоновую энтропию гало темной материи и сравнил результаты с теоретической моделью. Также автор подготовил основной текст данной статьи.
- В работе **A2** автор разработал и описал на языке **C** модель гравитационного линзирования галактик, а также занимался определением функции светимости модельных галактик и сравнением параметров модельного

обзора с моделью пуассоновского распределения источников. Также автор подготовил текст соответствующих глав в данной статье.

- В работе **A3** автор самостоятельно на языке **C** выполнил несколько модификаций общедоступного кода для космологического численного моделирования **GADGET-2** [88], самостоятельно подготовил начальные условия (**Python**) и выполнил численный расчет пар первичных черных дыр на суперкомпьютере **MareNostrum**. Автор также занимался обработкой результатов численного моделирования и на языке **Python** разработал собственную модель для учета излучения гравитационных волн в тесных парах первичных черных дыр. Также автор подготовил основной текст данной статьи.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 115 страниц с 18 рисунками и 6 таблицами. Список литературы содержит 209 наименований.

Список сокращений и условных обозначений

В данной работе используется система СГС (сантиметр, грамм, секунда). В качестве астрофизических величин расстояния и плотности потока излучения используются «парсек» ($1 \text{ пк} \approx 3.26 \text{ световых года} \approx 3.08 \cdot 10^{18} \text{ см}$) и «Янский» ($1 \text{ Ян} = 10^{-23} \text{ (эрг/с)/(см}^2 \cdot \text{Гц)}$). Для измерения массы используются солнечные массы ($1 M_{\odot} \approx 1.98 \cdot 10^{33} \text{ грамм}$).

Встречающиеся аббревиатуры:

- **ТМ** — Темная Материя
- **Λ CDM** — Lambda Cold Dark Matter – современная стандартная космологическая модель, в которой Вселенная помимо обычной барионной материи заполнена тёмной энергией (описываемой космологической постоянной Λ в уравнениях Эйнштейна) и холодной тёмной материей (англ. Cold Dark Matter)
- **NFW** — профиль Наварро — Френка — Уайта — аналитическая модель пространственного распределения плотности гало тёмной материи, предложенная Хулио Наварро, Карлосом Френком и Саймоном Уайтом (Navarro, Frenk, White) в 1996 году [58].
- **CMB** — Cosmic Microwave Background – Микроволновый Фон неба, или «реликтовое излучение»
- **ИКФ** — Инфракрасный Фон неба
- **ПЧД** — Первичная Черная Дыра
- **ГВ** — Гравитационные Волны

Словарь терминов

симуляция — численный расчет при помощи компьютерной модели, в данной работе всегда подразумеваются космологические численные модели N тел

касп — резкий пик в распределении плотности гало тёмной материи в центральных областях, где плотность значительно увеличивается на малых радиусах

ядро — область практически постоянной плотности в профиле плотности темной материи в центральной части гало

фракция (ПЧД в ТМ), f_{PVD} — доля темной материи, состоящей из первичных черных дыр, в "обычной" темной материи

Список рисунков

- 1.1 Формирование одиночного гало темной материи при численном моделировании формирования структуры в космологической модели Λ CDM. Все панели соответствуют одному физическому размеру и иллюстрируют 20 000 частиц (которые при $z = 0$ входят в сферу вириального радиуса). При красном смещении $z = 0$ (последняя панель) они оказываются в едином гало. Слева направо и сверху вниз панели соответствуют красным смещениям 3,5, 2,3, 1,5, 0,82, 0,35 и 0,0. Иллюстративный рисунок из работы [94] 28
- 1.2 *Слева* — Доля частиц в сферическом слое на заданном радиусе, которые попали туда в результате диффузной аккреции (черные кружки - сплошная линия), в результате слияний небольших гало (звездочки - пунктирные), а также крупных слияний (синие треугольники - пунктир) для численного расчета Aquarius Project. Иллюстративный рисунок из работы [98]. *Справа* — Результирующие профили плотности при столкновении типа "ядро-ядро"(пунктирная линия), "касп-касп"(сплошная линия) и "касп-ядро"(пунктирная линия). Столкновение типа "касп-ядро" приводит к образованию гало с профилем плотности, намного более похожим на столкновение типа "касп-касп" чем на столкновение типа "ядро-ядро". Иллюстративный рисунок из работы [99]. 30
- 1.3 Гало темной материи в момент $z=0$ (область высокого разрешения). Темный цвет означает более высокую плотность. Иллюстративный рисунок из работы **A1: [1]** 35
- 1.4 Соответствие масс гало-двойников из парных расчетов. В случае, когда массы гало-двойников совпадают, точка лежит на прямой $M_1 = M_2$, *слева* — наша численная модель, *справа* — модель Местной группы. Совместный результат диссертанта из работы **A1: [1]** 37

- 1.5 Слева — точками изображена фоновая энтропия E_b , оцененная нашим методом, в зависимости от массы M_r , сосредоточенной внутри радиуса r для численного расчета из данной работы и для модели Местной группы. Линией изображена теоретическая оценка фонового значения энтропии. Разница между полученными значениями подробно обсуждается в тексте статьи. Справа — Кривые синего и красного цвета - полная энтропия E гало наподобие нашей Галактики в зависимости от массы M_r , сосредоточенной внутри радиуса r . Каждая кривая соответствует одному из двух расчетов, различающихся мелкомасштабными фазами. Точками показана фоновая энтропия E_b , полученная после обработки модели Местной группы. Совместный результат диссертанта из работы **A1: [1]** . . . 38
- 2.1 Несколько участков проекции конуса на плоскость XY в сопутствующих координатах. Ось X направлена вдоль оси конуса. Каждая точка — отдельное гало. Иллюстративный рисунок из работы **A2: [2]** 48
- 2.2 Подсчеты числа источников в нашей модели с учетом эффектов гравитационного линзирования (сплошные линии), без учета гравитационного линзирования (пунктирная линия) и в модели [112] (штриховая линия) на 70, 250, 500 и 1200 мкм. Тонкая штрих-пунктирная линия – наша модель для случая минимального красного смещения $z = 0.3$. Совместный результат диссертанта из работы **A2: [2]** 52
- 2.3 Пример участка карты модельного фона неба размером 100 на 100 угловых секунд на длине волны 300 мкм. Слева крестами показаны пики интенсивности, найденные с помощью вторых производных. Справа точками показаны модельные галактики. Размер точки пропорционален логарифму потока от галактики. Иллюстративный рисунок из работы **A2: [2]** 55
- 2.4 Спектр мощности пространственной анизотропии ИК-фона неба на длинах волн 250, 350 и 500 мкм (слева направо). Круги – результаты работы [139] (ошибки не показаны), сплошная линия – данная работа. Иллюстративный рисунок из работы **A2: [2]** . . . 57

- 3.1 Доля вириализованных структур, состоящих из *обычной ТМ* для гало массивнее $30 - 30 M_{\odot}$, как функция красного смещения z . Совместный результат диссертанта из работы **А3: [3]** 66
- 3.2 Количество частиц ПЧД n как функция красного смещения z для фракции ПЧД $f_{PBH} = 1.0$, где n представляет различные подмножества частиц ПЧД (см. Легенду): n_{bound} - общее количество гравитационно-связанных частиц в моделировании; n_{form} - количество частиц, которые в данный момент (т.е. между двумя срезами по времени) образуют пару; n_{decay} - частицы в паре, распадающиеся на данном красном смещении z . А n_{vir} представляют частицы, которые в настоящее время являются частью вириализованной структуры (см. Раздел 3.4.3). Совместный результат диссертанта из работы **А3: [3]** 70
- 3.3 Траектории частиц с различными расстояниями до перицентра. *Синяя сплошная линия* соответствует моделируемой орбите с перицентром $p = 0,0125$ рс, а *светло-серая линия* соответствует $p = 0,0008$ пк; *пунктирная черная линия* представляет теоретическую траекторию для частицы с $p = 0,0008$ рс. Красный сплошной круг соответствует длине сглаживания $\epsilon = 0,001$. Совместный результат диссертанта из работы **А3: [3]**. 72
- 3.4 *Пунктирные линии*: количество пар, разрушенных из-за эффектов гравитационного сглаживания в обоих моделированиях (доля ПЧД $f_{PBH} = 1.0$), *Сплошные линии*: общее количество пар, разрушенных на момент каждого среза по времени в обоих моделированиях . Где $\epsilon_1 = 0,001$ пк и $\epsilon_1 = 0,02$ пк - длины сглаживания в каждой из численных моделей соответственно (см. обозначения). Совместный результат диссертанта из работы **А3: [3]**. 74

- 3.5 Анализ изменения орбиты системы двух тел из-за ошибок численного интегрирования по времени в GADGET-2. Эксцентриситет пары e (левая панель) и большая полуось a (правая панель) как функция времени в единицах периодов обращения. Синяя пунктирная линия соответствует моделированию с включенным параметром PSEUDOSYMMETRIC и временным шагом $\Delta t = 10^{-6}$, красная пунктирная линия представляет моделирование с выключенным параметром PSEUDOSYMMETRIC и временным шагом $\Delta t = 10^{-6}$. Сплошная черная линия представляет моделирование с временным шагом $\Delta t = 10^{-7}$, на результаты которого параметр компиляции PSEUDOSYMMETRIC не влияет. Совместный результат диссертанта из работы **A3: [3]**. 76
- 3.6 Распределение событий разрушения пары на протяжении всей симуляции как функция ($f_{PВН} = 1.0$) от $\log_{10}(P)$, где P - количество орбитальных периодов, прошедших до того, как пара будет разрушена. То есть «0» соответствует одному полному периоду. Совместный результат диссертанта из работы **A3: [3]**. 77
- 3.7 Вероятности разрушения пары: внутри гало ПЧД P_{halo} (красные точки), вне гало P_{free} (оранжевые треугольники) и полная вероятность разрушения пары на каждом срезе по времени P_{decay} (черная сплошная линия) как функция красного смещения z . Эти результаты соответствуют моделированию с $f_{PВН} = 1.0$. Совместный результат диссертанта из работы **A3: [3]**. 79

- 3.8 Количество *гравитационно-связанных* пар ПЧД на протяжении моделирования как функция красного смещения z . Общее количество частиц зафиксировано на $N = 10^4$. Моделирование с $N > 10^4$ масштабируется до этого значения. Различные линии соответствуют моделированиям с различными долями темной материи в форме ПЧД, варьирующимся от $f_{РВН} = 1.0$ до $f_{РВН} = 10^{-4}$ (см. легенду для конкретных символов).
Оранжевая пунктирная линия представляет моделирование с $f_{РВН} = 10^{-4}$ и общим количеством частиц $N = 10^5$, а *красная пунктирная* линия представляет моделирование с той же долей ПЧД, но для $N = 10^6$. Совместный результат диссертанта из работы **А3: [3]**. 82
- 3.9 Скорость слияния пар ПЧД, r_m , как функция красного смещения z (см. легенду для конкретных символов).
Шестиугольники с красной заливкой представляют результаты моделирования с частицами $f_{РВН} = 10^{-4}$ и $N = 10^5$, а *белые шестиугольники с оранжевой границей* представляют моделирование высокого разрешения с $f_{РВН} = 10^{-4}$ и $N = 10^6$ частицами. Экстраполированные значения в соответствующие точки для разных фракций ПЧД представлены *светло-серыми прямыми линиями*. Совместный результат диссертанта из работы **А3: [3]**. 83

Список таблиц

1	Результаты измерения энтропии ядра гало.	37
2	Параметры конуса модельного обзора	48
3	Сравнение с подсчетами источников на ALMA	55
4	Предел путаницы в дальнем ИК/субмиллиметровом диапазоне . .	56
5	Параметры моделирования.	68
6	Отношение количества захватов, связанных с эффектами ОТО ($n_{cap(GR)}$) к общему количеству чисто ньютоновских захватов ($n_{cap(Nt)}$) для численных моделей с различной долей ПЧД (f_{PBH}).	69

Глава 1. Моделирование гало темной материи: проверка энтропийного подхода к проблеме каспов

1.1 Введение

Как мы упоминали во Введении, существует множество свидетельств того, что галактики находятся в обширных гало темной материи. *Гало тёмной материи* — компонент галактик, окружающий галактический диск и простирающийся далеко за пределы видимой части галактики. Темная материя (ТМ) составляет около 27% от полной плотности Вселенной, и в несколько раз превосходит по массе обычную (барионную) материю, поэтому наблюдаемые свойства крупномасштабной структуры Вселенной, в основном, определяются распределением темной материи. Параметры этого распределения в масштабах более Мегапарсека достаточно хорошо определяются наблюдениями, а также хорошо поддаются теоретическому описанию [89]. На меньших масштабах рядом авторов отмечаются проблемы при сравнении предсказаний теории и результатов наблюдений: проблема спутников, проблема карликовых галактик [90—93], проблема каспов (о ней речь пойдет ниже).

Согласно нынешней парадигме, гало ТМ образуются благодаря гравитационной нестабильности — возмущения плотности растут линейно до тех пор, пока не достигают критической плотности, после чего они отделяются от расширения Вселенной и коллапсируют, образуя вириализированные гало ТМ. Эти гало продолжают расти в массе и размерах за счет аккреции материала из их окрестностей, а также за счет слияния с другими гало. Некоторые из этих гало могут выжить как связанные структуры после слияния в более крупное гало, что приводит к возникновению популяции субгало. Этот процесс проиллюстрирован на Рисунке , который показывает образование гало темной материи при численном моделировании формирования структуры в космологической модели Λ CDM. На нем изображено как небольшой объем с малыми возмущениями первоначально расширяется вместе со Вселенной. Со временем мелкомасштабные возмущения нарастают и схлопываются, образуя сгустки ТМ. На более поздней стадии эти сгустки сливаются вместе, образуя единое вириализованное гало тем-

ной материи эллипсоидальной формы, в котором наблюдается субструктура в виде субгало темной материи (см. Рисунок 1.1).

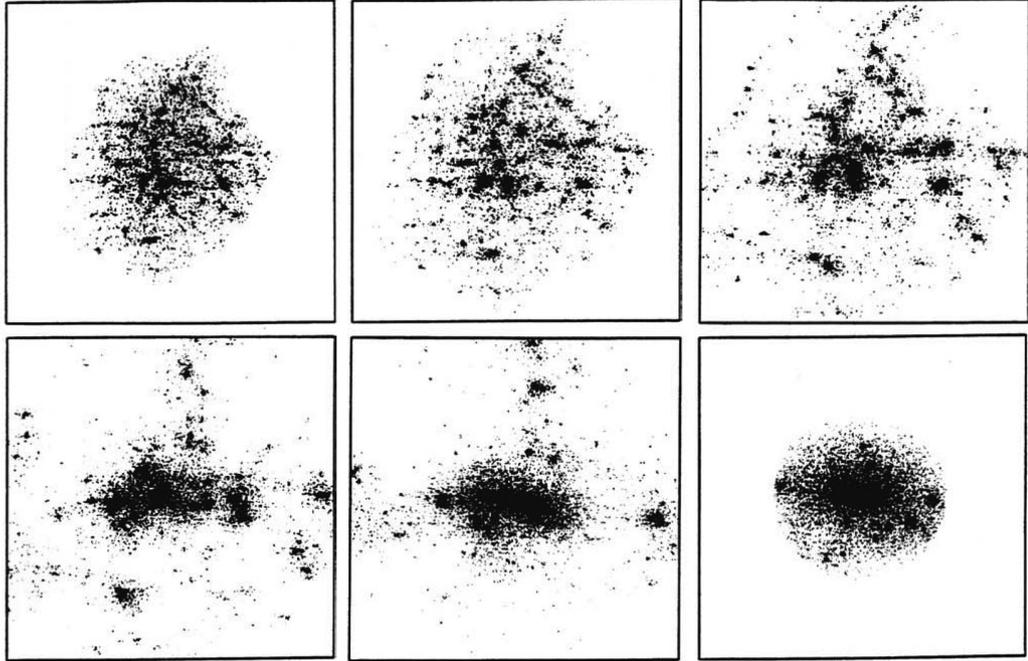


Рисунок 1.1 — Формирование одиночного гало темной материи при численном моделировании формирования структуры в космологической модели Λ CDM. Все панели соответствуют одному физическому размеру и иллюстрируют 20 000 частиц (которые при $z = 0$ входят в сферу вириального радиуса). При красном смещении $z = 0$ (последняя панель) они оказываются в едином гало. Слева направо и сверху вниз панели соответствуют красным смещениям 3,5, 2,3, 1,5, 0,82, 0,35 и 0,0. Иллюстративный рисунок из работы [94]

Аналитической теории, количественно описывающей зависимость параметров гало от начальных условий (например, от спектра мощности начальных возмущений) не существует, и поэтому основным инструментом исследования гало пока являются численные модели.

Для описания распределения массы внутри гало Наварро, Френком и Уайтом (NFW) [58] в численных моделях эмпирически найдено следующее соотношение:

$$\rho = \frac{\rho_0}{x(1+x)^2}, x = \frac{r}{r_0} \quad (1.1)$$

где ρ — плотность, r — расстояние от центра, r_0 , ρ_0 — параметры. При оценке профиля плотности гало из наблюдений, формула NFW хорошо описывает данные для гало скоплений галактик (масса более 10^{13} масс Солнца). [58]

Однако для некоторых галактик эта формула не подходит, вместо неё Бюркертом [95] предложена формула:

$$\rho = \frac{\rho_0}{(1+x)(1+x^2)} \quad (1.2)$$

Как видно, разница заключается в том, что в наблюдаемых галактиках имеется «ядро» — область с постоянной в пространстве плотностью. Тогда как результаты численного моделирования, выполненного различными группами исследователей [96], [97], показывают, что в численных моделях не наблюдается гало с профилем Бюркертта. Налицо несоответствие между результатами моделирования и наблюдениями — так называемая «проблема сингулярного гало» или «проблема каспов».

В крупных численных расчетах ТМ, таких как Aquarius Project ([70]), было показано, что центральные области гало формируются гораздо раньше периферийных областей, то есть гало формируется "из-центра-наружу" (см. [98]). В центральных областях преобладают частицы принесенные в результате крупных слияний субгало, а так же частицы, которые аккрецировали в центр на ранних этапах формирования гало. Тогда как внешние области гало формируются в основном за счет диффузной аккреции частиц и слияний небольших субгало (см. левую часть Рисунка 1.2). С другой стороны, из более ранних работ (например [99]) известно, что в результате слияния двух гало «ядро» может образоваться только в случае, когда оба сливающихся гало уже обладали «ядром» до слияния (т.н. "ядро-ядро"), тогда как в двух других случаях ("касп-касп" и "касп-ядро") в результирующем профиле плотности будет наблюдаться «касп» (см. правую часть Рисунка 1.2).

Существуют ли каспы темной материи в природе? Как устроены каспы и каковы должны быть условия для их формирования? Ответы на эти вопросы важны не только для понимания процессов образования галактик, но и для физики частиц темной материи. Например один из методов поиска продуктов возможной аннигиляции частиц темной материи [100], [101], опирается на гипотезу о существовании центральных каспов в галактиках.

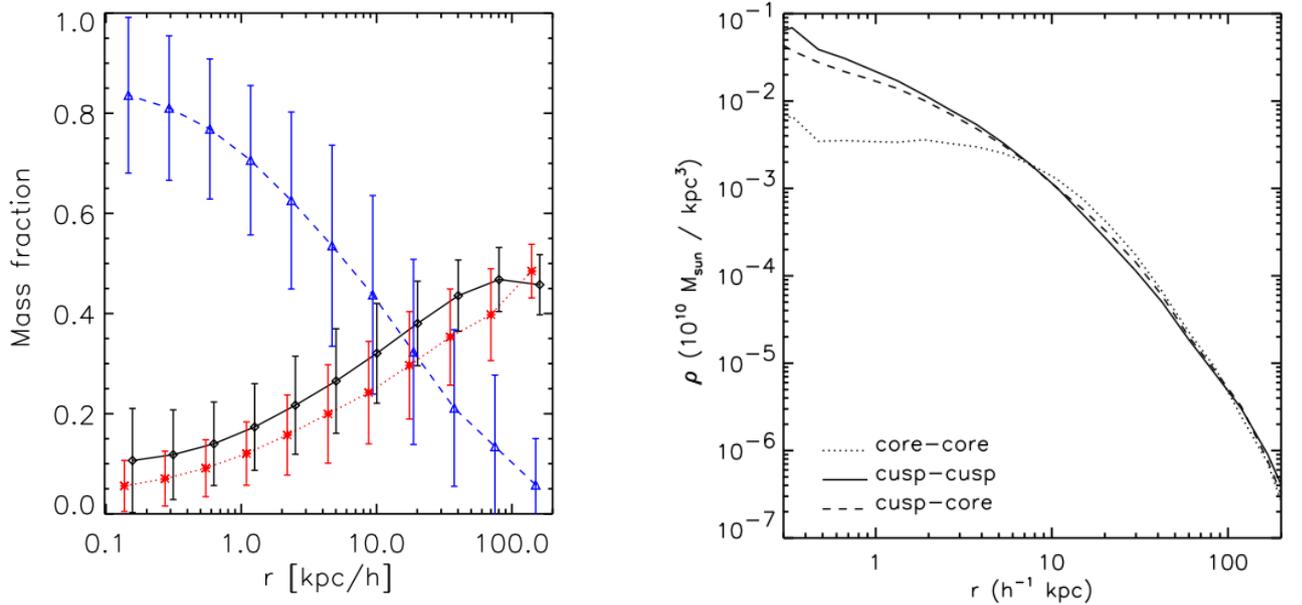


Рисунок 1.2 — *Слева* — Доля частиц в сферическом слое на заданном радиусе, которые попали туда в результате диффузной аккреции (черные кружки - сплошная линия), в результате слияний небольших гало (звездочки - пунктирные), а также крупных слияний (синие треугольники - пунктир) для численного расчета Aquarius Project. Иллюстративный рисунок из работы [98]. *Справа* — Результирующие профили плотности при столкновении типа "ядро-ядро" (пунктирная линия), "касп-касп" (сплошная линия) и "касп-ядро" (пунктирная линия). Столкновение типа "касп-ядро" приводит к образованию гало с профилем плотности, намного более похожим на столкновение типа "касп-касп" чем на столкновение типа "ядро-ядро". Иллюстративный рисунок из работы [99].

1.2 Энтروпийный подход

Как показано в [67], в случае изотропного распределения скоростей частиц, равновесие гало определяется балансом градиента эффективного давления нерелятивистской материи

$$p = nT = \rho\sigma^2, \quad (1.3)$$

и силы гравитации полной массы $M = M(r)$ (где $M(r)$ — это масса внутри сферы радиусом r)

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}, \quad (1.4)$$

где функции от радиуса $n = \rho/m$ и T соответствуют плотности и эффективной температуре частиц с массой $m = const$. Измеряемыми переменными являются плотность ρ и дисперсия скорости частиц σ . В расчетах здесь и далее плотность ρ будет выражаться в единицах критической плотности Вселенной, а дисперсия скорости σ в км/с.

Уравнение гидростатического равновесия, при предположении об изотропной функции распределения скоростей, позволяет найти профиль плотности вещества в гало по известному распределению дисперсии скорости $\sigma(r)$ и, наоборот, по заданному распределению плотности реконструировать дисперсию скорости. При адиабатическом изменении плотности $\sigma \propto n^{1/3}$, а коэффициент пропорциональности зависит от распределения энтропии.

По аналогии со случаем идеального газа, "*функция энтропии*" гало вводится следующим образом:

$$E = \sigma^2 \left(\frac{\bar{\rho}_0}{\rho} \right)^{2/3} \propto \frac{T}{n^{2/3}} = \frac{p}{n^{5/3}}, \quad (1.5)$$

где $\bar{\rho}_0$ — средняя плотность Вселенной. Для введения функции энтропии мы используем подход, предложенный в работе [102]. А именно, бесстолкновительные системы из ТМ подчиняются уравнению Больцмана (а не уравнениям термодинамики) и не обладают статистической механической энтропией термодинамической системы. Из-за отсутствия столкновений точная фазовая плотность сохраняется, но мы считаем дисперсию скорости и плотность в *конечном объеме*, и для замкнутой системы фазовая плотность со временем только падает, а функция энтропии [67] растет со временем.

Функция $E(r)$ является мерой совокупной энтропии частиц гало, накопленной за всю историю его образования. Как показано в [67], функцию энтропии гало можно представить в виде суммы вкладов фоновой энтропии E_b , заданной начальными мелкомасштабными течениями и неоднородностями матери в протоголо, и приобретённой энтропии E_g , генерируемой в ходе бесстолкновительной и иерархической релаксации матери на нелинейной стадии формирования

гало. Фоновая энтропия в [67] была оценена по линейной теории после подсчета дисперсии флуктуаций скорости в сфере заданной массы.

Соответственно, в процессе образования гало темной материи можно выделить несколько этапов (см. [67]):

1. Начальные движения ТМ потенциальны и сфазированы (см. приближение Зельдовича [50]), относительные скорости близких частиц малы, имеется гладкое поле скоростей ТМ. Случайные отклонения от средней скорости, задаваемые спектром начальных возмущений, увеличиваются с нарастанием масштаба, достигая насыщения на относительно больших масштабах (~ 40 МПк).
2. При сжатии протогало происходит сближение и перемешивание частиц в малых масштабах, теряется начальная фаза мелкомасштабной части случайной скорости: частицы ТМ «подогреваются» (возникает фоновая энтропийная функция E_b)
3. Хаотизация скорости регулярного сжатия и превращение кинетической энергии сжатия в тепловую энергию происходят несколько позднее в ходе бурной релаксации и слияния сгустков (генерируется энтропия E_g)
4. Результирующий профиль равновесных гало получается объединением фоновой (или начальной) энтропии E_b и приобретенной энтропии E_g .

Вопрос о формировании центрального каспа или ядра зависит от полной энтропии материи, приобретенной до образования гало, а так же в процессе его образования - высокий ее уровень будет соответствовать гало с ядром, а низкий - с каспом. Как показано в [67], касп — это область с низкой энтропией, которая стремится к нулю в центре гало. Иначе говоря, в центре гало с каспом накапливаются "холодные" частицы, тогда как в случае ядра частицы "горячее" и потому свободно пролетают центральную область гало, не накапливаясь в ней. Под полной энтропией вириализированного гало подразумевается совокупное воздействие всех неравновесных процессов, протекавших за время его формирования, включающее в себя как фоновую энтропию частиц E_b , так и приобретенную энтропию E_g , генерируемую в ходе бурной релаксации и иерархического скучивания материи. [67]

1.3 Измерение фоновой энтропии

Для проверки энтропийного подхода с помощью численных расчетов было бы достаточно измерить по отдельности фоновую, сгенерированную и суммарную функции энтропии для гало, получаемых в численных моделях. Функцию энтропии стабильного гало легко измерить пользуясь определением (1.5). Несмотря на то, что для частиц, из которых состоит гало, имеется полная информация об их движениях начиная от самых ранних моментов, когда вещество распределено почти однородно, измерить фоновую энтропию не так просто. Применяя определение (1.5) к начальному распределению частиц, мы можем измерить функцию энтропии для некоторых групп соседних частиц, но после образования гало эти частицы, вообще говоря, не обязательно должны остаться соседями. Иными словами, чтобы получить дисперсию скорости, входящую в (1.5), необходимо усреднить квадраты скоростей частиц по некоторому объему, который нельзя строго определить, и ответ очень сильно зависит от формы и размера этого объема.¹

Чтобы преодолеть эту трудность, мы разработали совершенно иной оригинальный способ измерения фоновой энтропии. Выполняется два численных расчета образования гало из похожих начальных условий. Последние задаются как реализации случайного гауссового процесса с заданным спектром мощности возмущений плотности, известным исходя из космологической модели. Обычно численно генерируется набор пространственных Фурье-гармоник с амплитудами, соответствующими заданному спектру, и случайными фазами. В нашем же случае пара начальных условий имеет одинаковые фазы возмущений плотности и скорости на масштабе порядка размера гало, а на меньших масштабах эти фазы разные. Одинаковость фаз на больших масштабах обеспечивает одинаковую историю образования гало в двух моделях, а следовательно, и одинаковую приобретенную (сгенерированную) энтропию. Поэтому разница между функцией энтропии гало из двух этих моделей целиком определяется фоновой энтропией, которую становится возможным измерить путем вычитания функций энтропий

¹Мы иллюстрируем эту трудность путем измерения энтропии в Табл. 1. Там приведены значения полной энтропии в центральной части гало $r < r_s$, а так же энтропия частиц, из которых образовалось ядро, на начальный момент времени. Из сравнения значения энтропии, полученной таким образом, и энтропии, посчитанной в линейной теории, видно, что наблюдается большое расхождение между ними. А значит, как минимум одна из этих оценок не верна.

этих двух гало. Иначе говоря, для оценки значения $f_b = \frac{E_b}{E}$ нам потребуется отделить фоновую энтропию от полной. И хотя у нас нет возможности сделать это напрямую (поскольку соотношение E_b и E_g неизвестно), нетрудно заметить, что если две симуляции отличаются друг от друга только мелкомасштабной частью начальных возмущений, то процессы релаксации и иерархического скучивания будут происходить в них одинаково (см. п.3 из списка, приведенного выше). Соответственно, значения приобретенной (сгенерированной) энтропии E_g в них также будут совпадать. Что, в свою очередь, дает нам возможность полностью исключить влияние приобретенной энтропии E_g .

Предполагая, что фоновая энтропия распределена по Гауссу около некоторой средней величины, нетрудно получить следующее соотношение:

$$\sigma(E_{sim1} - E_{sim2}) = \sqrt{2}\sigma(E_b), \quad (1.6)$$

где $\sigma(E_{sim1} - E_{sim2})$ - дисперсия разницы значений полной энтропии E_{sim1} и E_{sim2} пар гало из двух расчетов (усреднение будем выполнять по разным реализациям гало), а $\sigma(E_b)$ - дисперсия фоновой энтропии. Но с другой стороны, известно что дисперсия фоновой энтропии связана с самой величиной как

$$\sigma_{E_b} = \sqrt{3}E_b \quad (1.7)$$

(см. работу [67]) Поэтому, имея ансамбль смоделированных гало близких масс, из формул 1.6 и 1.7 нетрудно найти среднюю фоновую энтропию для гало рассматриваемых масс.

1.4 Численный эксперимент

Для проверки работоспособности и выяснения точности «энтропийного метода» на суперкомпьютере Ломоносов-2 был построен ряд численных моделей образования гало темной материи с переменным в пространстве разрешением. Размер куба в каждой численной модели составляет $64 h^{-1}$ Мпк. Решение получено в рамках космологической стандартной модели Λ CDM с параметрами $\Omega_\Lambda = 0.693$, $\Omega_m = 0.307$, $h = 0.677$, $\sigma_s = 0.829$, $n_s = 0.961$ [6].

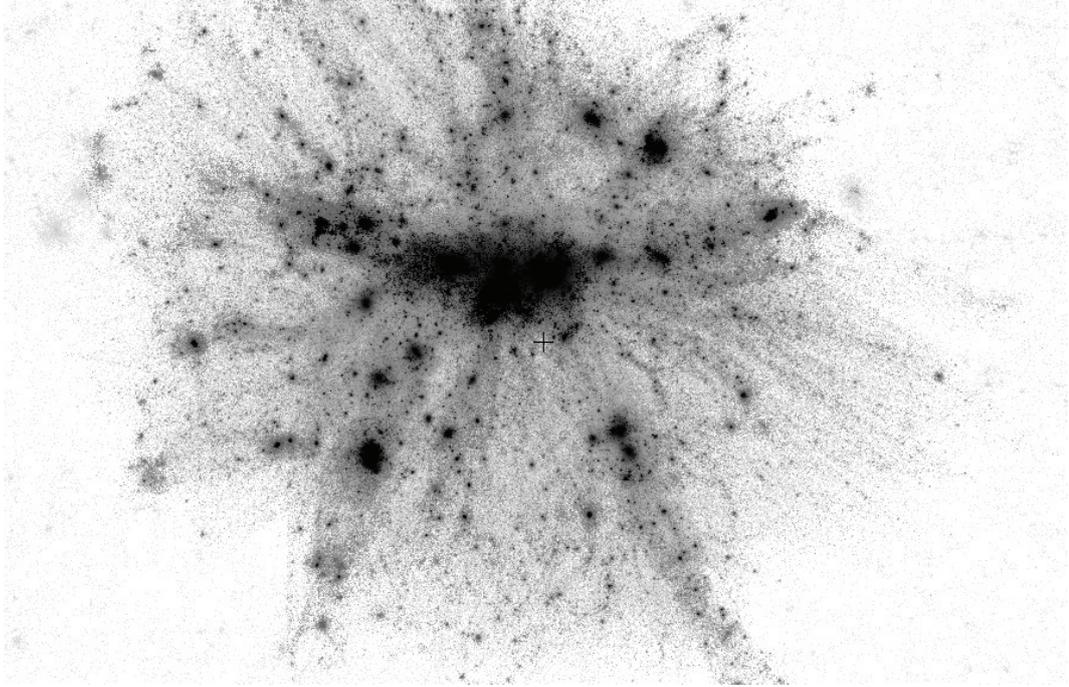


Рисунок 1.3 — Гало темной материи в момент $z=0$ (область высокого разрешения). Темный цвет означает более высокую плотность.

Иллюстративный рисунок из работы **A1**: [1]

Начальные условия были подготовлены с использованием массивно-параллельного публичного кода для расчетов с переменным разрешением `ginnungagap`² при начальном красном смещении $z_{init} = 49$. Сами расчеты были выполнены при помощи публичной версии кода `GADGET-2`³[88]. Для построения спектра мощности начальных возмущений использована переходная функция Эзенштейна-Ху [59]. Функция представляет собой общую формулу подгонки, которая при известном начальном спектре мощности позволяет достаточно эффективно и точно вычислять статистику спектра мощности для всех распространенных вариантов ТМ, включая модели смешанной темной материи как функции волнового числа, времени, а также шести космологических параметров: плотности массивных нейтрино, количества разновидностей вырожденных по массе нейтрино, барионной плотности, постоянной Хаббла, космологической постоянной и пространственной кривизны.

Начальные условия для каждого расчета были заданы таким образом, что при одном и том же спектре мощности в разных расчетах крупномасштабная часть реализации начальных условий (масса соответствует $m \geq 10^{12} h^{-1} M_{\odot}$)

²<https://github.com/ginnungagapgroup/ginnungagap>

³<https://wwwmpa.mpa-garching.mpg.de/volker/gadget/>

остаётся неизменной, а мелкомасштабная часть ($m < 10^{12} h^{-1} M_{\odot}$) варьируется.⁴ Максимальное разрешение расчетов соответствует 1024^3 частиц, при массе пробной частицы $m \approx 2.08 * 10^7 h^{-1} M_{\odot}$. Выделенная область высокого разрешения задается сферой радиуса $8 h^{-1}$ Мпк с центром в самом массивном гало моделируемого куба (см. Рисунок 1.3).

Также было использовано два других расчета, полученные в рамках проекта по воспроизведению Местной Вселенной в численных расчетах CLUES [103] на суперкомпьютере MareNostrum в Вычислительном Центре г. Барселоны (Barcelona Supercomputing Center). Эти расчеты выполнялись для других целей, однако они также содержат две реализации, отличающиеся фазами мелкомасштабных возмущений. Размер модельного куба составил $100 h^{-1}$ Мпк/h, эффективное разрешение — 4096^3 частиц. Область высокого разрешения радиусом $4 h^{-1}$ Мпк была центрирована на двух гало, напоминающих по своим параметрам Местную группу галактик. При каждом моделировании использовались следующие космологические параметры: $\Omega_{\Lambda} = 0.688$, $\Omega_m = 0.312$, $h = 0.677$, $\sigma_8 = 0.833$. Масштаб, на котором появляются различия в фазах, соответствует массе $6.5 \times 10^8 h^{-1} M_{\odot}$.

Для того, чтобы правильно вычислить разницу $\sigma(E_{sim_1} - E_{sim_2})$ для начала требуется кросс-идентифицировать гало из двух расчетов. Иначе говоря, i -е гало из расчета 1. (sim_1) должно соответствовать i -му гало из расчета 2. (sim_2). Для поиска гало использовался открытый код AMIGA Halo Finder⁵[104], однако, как видно на Рисунке 1.4, только относительно массивные гало (от $M > 10^{12} M_{\odot}$ для наших численных моделей и $M > 10^{10} h^{-1} M_{\odot}$ для моделей Местной группы) кросс-идентифицируются с высокой степенью точности⁶. Гало меньших масс имеют уже слишком разную историю образования, и, соответственно, сгенерированную энтропию, поэтому их использовать для нашей задачи нецелесообразно.

Для каждого гало был построен профиль функции энтропии $E(< M)$ для сфер, ограниченных полной массой M . Для пар гало из разных расчетов профили вычитались друг из друга, затем для каждого значения M была посчитана дисперсия разницы функции энтропии по ансамблю всех используемых гало.

⁴Большие масштабы соответствуют области с разрешением от 128^3 до 256^3 частиц. Маленькие масштабы — от 512^3 до 1024^3 .

⁵oria.ft.uam.es/АНФ/

⁶Различия масс кросс-идентифицированных гало из двух симуляций не превышают 0.10-0.15

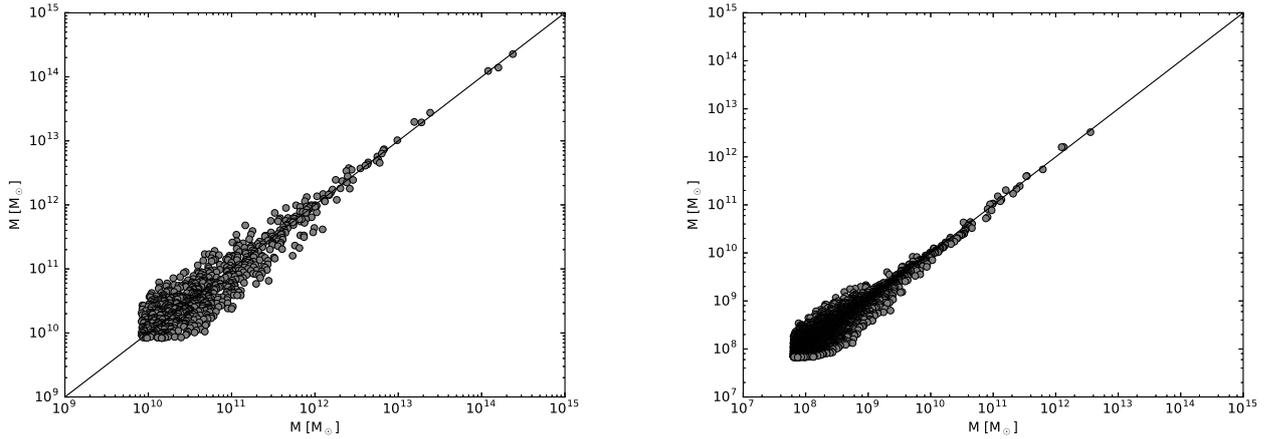


Рисунок 1.4 — Соответствие масс гало-двойников из парных расчетов. В случае, когда массы гало-двойников совпадают, точка лежит на прямой $M_1 = M_2$, *слева* — наша численная модель, *справа* — модель Местной группы.

Совместный результат диссертанта из работы **A1**: [1]

1.5 Результаты

Таблица 1 — Результаты измерения энтропии ядра гало.

Энтропия ядра на $z=0$ (Lomonosov-2)	Энтропия группы частиц на момент ($z=40$)	Энтропия сферической группы на момент $z=40$	Фоновая энтропия найденная нашим методом (см. Рисунок 1.5) (Lomonosov-2)	Фоновая энтропия, найденная по линейной теории
1005.29 $\text{км}^2/\text{с}^2$	4.27 $\text{км}^2/\text{с}^2$	3.29 $\text{км}^2/\text{с}^2$	113.02 $\text{км}^2/\text{с}^2$	14632.61 $\text{км}^2/\text{с}^2$

На Рисунке 1.5) слева показана оцененная нашим методом фоновая энтропия гало, а также ее теоретическая оценка, полученная путем вычисления дисперсии скорости частиц темной материи в сфере массой M по линейной теории и применения формулы (1.5). Видно, что результаты измерения показали существенно более низкую энтропию. Видимо, это связано с тем, что при теоретической оценке энтропии усреднение ведется по сферическому объему, тогда как в случае численного счета распределение материи из которого впоследствии образуется ядро (колонка 2 в Таблице 1) очень сильно отличается от сфериче-

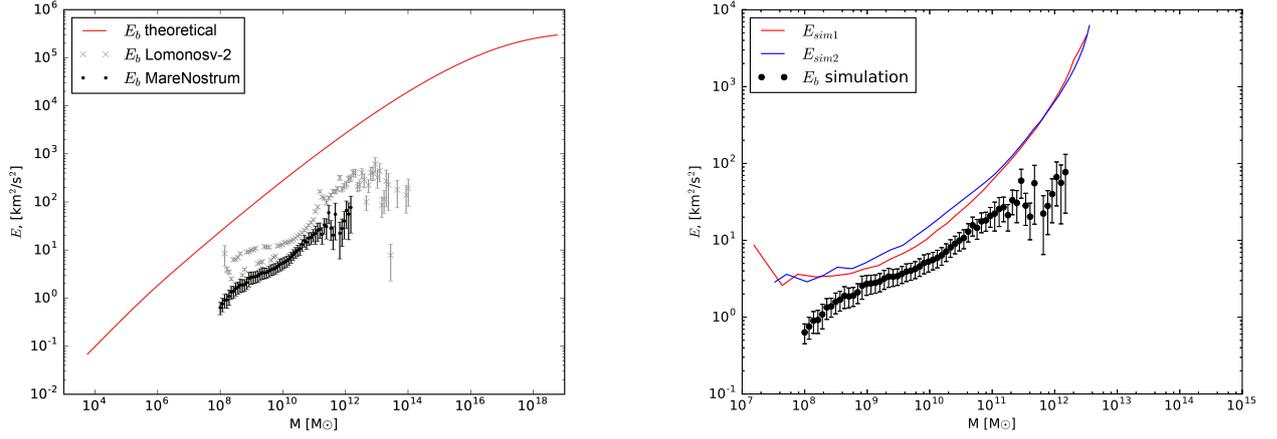


Рисунок 1.5 — Слева — точками изображена фоновая энтропия E_b , оцененная нашим методом, в зависимости от массы M_r , сосредоточенной внутри радиуса r для численного расчета из данной работы и для модели Местной группы.

Линией изображена теоретическая оценка фонового значения энтропии.

Разница между полученными значениями подробно обсуждается в тексте статьи. Справа — Кривые синего и красного цвета - полная энтропия E гало наподобие нашей Галактики в зависимости от массы M_r , сосредоточенной внутри радиуса r . Каждая кривая соответствует одному из двух расчетов, различающихся мелкомасштабными фазами. Точками показана фоновая энтропия E_b , полученная после обработки модели Местной группы.

Совместный результат диссертанта из работы **A1**: [1]

ского. Возможно, более низкое значение энтропии в случае численного счета (по сравнению с теоретической оценкой) обусловлено тем, что большая часть массы в центральные области гало приносится слияниями крупных гало, ядра которых сами по себе также достаточно холодны (см. [99]).

В приведенной выше таблице указаны значения:

1. Энтропия ядра самого массивного гало ($M = 4.83 \cdot 10^{13} M_\odot$) симуляции Lomonosov-2 (на момент $z=0$)
2. Начальная энтропия группы частиц, из которых на момент $z=0$ образуется данное ядро (на момент $z=40$)
3. Начальная энтропия сферической области с центром, совпадающим с центром масс группы частиц из п.2. Радиус области выбран таким образом, чтобы масса частиц, попадающих в нее в точности соответствовала массе группы частиц из п.2.

4. Фоновой энтропии массы $M = 4.83 \cdot 10^{13} M_{\odot}$ (симуляция Lomonosov-2), полученной при помощи нашего метода.
5. Фоновой энтропии массы $M = 4.83 \cdot 10^{13} M_{\odot}$, полученной теоретически (см. [67])

Как видно из таблицы, начальная энтропия, посчитанная таким образом на несколько порядков отличается от фоновой энтропии, полученной при помощи нашего метода, а так же и от теоретического значения фоновой энтропии.

Поскольку фоновая энтропия оказалась значительно меньше, чем следует из линейной теории, это существенно влияет на предсказание о распространенности каспов среди темных гало. Так, если мы сравним полную энтропию гало массой как у нашей Галактики, т.е. $10^{12} M_{\odot}$, с фоновой энтропией, посчитанной по линейной теории, последняя оказывается выше первой уже для масс около $10^{11} M_{\odot}$, а это означает, что вся центральная часть галактики такой массы должна иметь более пологий профиль плотности, чем NFW, в соответствии с предсказанием [67]. Из правой части Рисунка 1.5) видно, что оцененная нашим методом фоновая энтропия оказывается всюду ниже, чем полная энтропия гало, а значит, для гало таких масс должен наблюдаться касп.

Этот вывод косвенно подтверждается результатами статьи [105], где авторы исследовали профили плотности микрогало при помощи масштабных численных расчетов сверхвысокого разрешения (масса частицы $4.3 \cdot 10^{-12} M_{\odot}$). Спектр мощности начальных возмущений в такой модели должен включать самые короткие длины волн, вплоть до обрезания на масштабах длины свободного перемешивания⁷, однако, даже в такой модели в центральных областях гало авторами по-прежнему наблюдались каспы. Было бы интересно проследить за дальнейшей эволюцией таких микрогало до гало малых и средних масс, соответствующих карликовым галактикам с массой около $10^8 - 10^9 h^{-1} M_{\odot}$, однако такая задача пока слишком сложна с точки зрения вычислительных ресурсов даже для современных суперкомпьютеров.

⁷англ. - free streaming length

1.6 Заключение

В данной главе предлагается оригинальный способ проверки так называемого «энтропийного подхода» к проблеме образования гало темной материи, предложенного А.Г. Дорошкевичем, В.Н. Лукашом и Е.В. Михеевой [67; 82] и предназначенного для исследования структуры гало.

В этом подходе используется понятие функции энтропии, являющейся, фактически, мерой дисперсией скорости частиц, входящих в гало. Полная энтропия гало, определенная в соответствии с уравнением (1.5) условно разделена на две составляющие:

1. «Фоновая» энтропия, характеризующая мелкомасштабные начальные неоднородности в распределении материи,
2. «Приобретенная» энтропия, характеризующая бесстолкновительную иерархическую релаксацию матери на нелинейной стадии формирования гало.

Чтобы измерить фоновую часть энтропии, мы выполняем два численных расчета образования гало, в которых мелкомасштабные фазы возмущений различаются — это приводит к различиям в фоновой энтропии для каждого гало, а крупномасштабные фазы возмущений одинаковы, благодаря чему история образования гало одинакова, а значит, и приобретенная часть энтропии не должна значительно отличаться. Попарное сравнение «гало-двойников» из двух расчетов и усреднение по ансамблю гало позволило нам извлечь величину фоновой энтропии.

В соответствии с выкладками, приведенными в статье [67], получена теоретическая оценка фоновой энтропии. Значение фоновой энтропии, полученное из численного счета на основе описанной модели отличается от него почти на порядок, как для симуляции на Lomonosov-2, так и для симуляции CLUES. Причем в обоих случаях расхождения примерно соответствуют друг другу, несмотря на значительно более высокое разрешение симуляции CLUES. Иными словами, касп в гало возникает из областей начального распределения материи, имеющих энтропию на порядок ниже, чем в среднем по Вселенной (внутри сферы с массой каспа).

Поэтому предположение о том, что симуляции высокого разрешения способны вносить добавочную фоновую энтропию и, таким образом, решить проблему каспов, скорее всего не соответствует действительности. Мы предполагаем, что такое расхождение связано в первую очередь с предположением о сферичности гало в теоретической модели [67].

Глава 2. Модель инфракрасного фона неба, созданного далекими галактиками

2.1 Введение

Фон неба состоит из многих компонент, которые можно разделить на две группы. Первая включает все компоненты, связанные с нашей Галактикой и Солнечной системой, такие как зодиакальный свет или галактические «перистые облака». Вторая группа не связана с нашей Галактикой. Спектр этой компоненты имеет два пика. Первый пик, который вызван реликтовым излучением (РИ), находится в миллиметровом диапазоне длин волн, а второй в дальнем ИК диапазоне. Последний называется космическим ИК фоном (ИКФ). Считается, что ИКФ в интервале длин волн 100–600 мкм, в основном, обусловлен излучением галактик на красных смещениях $z \sim 1 - 2$ с активным звездообразованием и большим количеством пыли, которая переизлучает большую часть звездного света в дальнем ИК диапазоне с максимум интенсивности в районе 100 мкм (в собственной системе отсчета).

При угловом разрешении, которым обычно обладают одиночные телескопы, предназначенные для наблюдений в дальнем ИК диапазоне, ИКФ не разрешается полностью на отдельные источники и состоит из пятен разной яркости. Пространственные флуктуации ИКФ создают так называемую «проблему путаницы», когда слабые точечные источники не могут быть отделены от пятен, созданных многими далекими галактиками. Данный эффект ограничивает чувствительность фотометрических исследований в дальнем ИК и субмиллиметровом диапазонах.

Будущие обсерватории дальнего ИК диапазона, такие как «Миллиметрон» (<http://millimetron.ru>, [85; 86]), CALLISTO, OST будут способны различить гораздо больше деталей на ИК картах неба, чем это доступно в имеющихся на сегодня наблюдениях. Поэтому для предсказания влияния эффекта путаницы для будущих наблюдения необходимо создание модели, способной экстраполировать текущие представления об ИКФ в область более высокого разрешения и чувствительности.

Целью настоящей работы является создание модели ИКФ для предсказания возможностей наблюдения с помощью космического телескопа «Миллиметр» и других подобных космических обсерваторий. Следует подчеркнуть, что эта модель ИКФ основана на использовании каталога гало, полученного с помощью одной из передовых численных моделей эволюции распределения материи во Вселенной, что позволяет нам детально изучать проявления крупномасштабной структуры Вселенной на картах ИК фона. Так как на сегодняшний день существует большое количество моделей ИКФ и подходов к их созданию, то оказывается важным классифицировать эти модели и подходы, а также выбрать из них наиболее подходящие для целей этой работы.

2.2 Классификация моделей ИКФ

Для создания модели ИКФ необходимо задать пространственное распределение галактик и их спектры. Существующие подходы к моделированию ИКФ можно разделить на три группы: «обратная эволюция», «прямая эволюция» и полуаналитический метод. Первые два подхода (метода) описаны в обзоре [106]. Кратко остановимся на перечисленных выше подходах.

Метод «обратной эволюции» основан на предположении, что можно задать эволюцию параметров модели, известных из наблюдений локальной Вселенной и наблюдений на некоторых значениях красного смещения, в направлении возрастания красного смещения, т.е. в "обратном" естественной эволюции (от образования объектов до наших дней) направлении. Моделированию с помощью этого метода посвящено множество работ, например, [107–112]. Обычно в методе «обратной эволюции» берется известная функция светимости и предполагается, что ее параметры эволюционируют с красным смещением z . Как именно они эволюционируют определяется свободными параметрами модели. Для описания нескольких популяций галактик используется библиотека спектров. В зависимости от сложности модели, формы спектров могут зависеть или не зависеть от z или светимости. Популяций галактик может быть, например, две [111–113], четыре [108; 114] или пять [107; 115]. В некоторых работах вместо аппроксимации эволюции функции светимости ее вычисляют из эволюции тем-

па звездообразования [113] или из предположения, что звездная функция масс эволюционирует вместе со звездообразованием, а также принимаются в расчет другие процессы [116]. Возможно использование функции цвета-светимости, а не функции светимости [117].

В способах определения свободных параметров также возможны разные подходы, например, могут быть использованы все доступные подсчеты источников и/или функции светимости [107—109; 112; 115; 117], спектры ИКФ [107], распределения по красному смещению объектов с потоками больше определенного для разных длин волн [107; 117] или параметры задаются из модельных предположений [111; 113].

Эффекты сильного гравитационного линзирования источников на больших красных смещениях также должны быть учтены. Необходимость этого подтверждается обнаружением ярких линзированных источников на больших красных смещениях в (суб)миллиметровом диапазоне [118; 119]. В случае сильного гравитационного линзирования должно наблюдаться как усиление яркости источника, так и изменение его углового размера. В случае достаточной разрешающей способности телескопа также возможно наблюдение его множественных изображений. Так как субмиллиметровые телескопы имеют ограниченное пространственное разрешение и, следовательно, подвержены эффекту путаницы, линзированные неразрешенные далекие источники должны вносить значительный вклад в фоновое излучение на субмиллиметровых длинах волн. Ожидаемое количество линзированных источников на длине волны 500 мкм с потоком более 100 мЯн составляет около 15% и эта доля возрастает до 40% на длине волны около 1 мм [112].

Следует отметить, что метод «обратной эволюции» не базируется на физической модели, во многом он основан на подгонке наблюдательных данных. Если выбрать форму функции светимости, выбрать спектры и аккуратно задать или подгонять свободные параметры, то, в принципе, можно аппроксимировать любые наблюдательные данные. Таким образом этот метод имеет хорошую описательную способность, но очень плохую предсказательную. При малом количестве наблюдательных данных его применение может привести к далеким от реальности результатам (см., например, [120]).

Важно отметить, что на «выходе» метода обратной эволюции получают лишь подсчеты источников как функция потока, красного смещения, свети-

мости. Никакой информации об их пространственном распределении и связи галактик с распределением темной материи данный подход не дает.

Метод «прямой эволюции» также подробно описан во многих работах, например, см. [106; 121; 122]. Его основная идея заключается в построении полуаналитической модели эволюции темного гало в соответствие, например, с формализмом Пресс-Шехтера. Из этой модели вычисляется функция масс гало и ее эволюция с красным смещением. После чего функция масс переводится в функции светимостей одного или нескольких типов галактик с учетом их эволюции [123; 124], процессов звездообразования, эволюции звезд, эффектов обратной связи, поглощения и излучения пыли [121; 122; 125–128], аккреции на черные дыры [124; 126] и т.д..

Основным недостатком классического подхода «прямой эволюции» является то, что получаемые ответы характеризуют фон лишь в среднем. Этот метод, как и метод обратной эволюции, позволяет получить число источников в заданном диапазоне длин волн и потоков, но не свойства (координаты, светимость, спектр) отдельных источников.

Третий подход, называемый полуаналитическим, был использован в ряде работ для получения свойств галактик в оптическом и ближнем ИК диапазонах, см., например, [129–131]. В рамках данного подхода используется численная модель эволюции темной материи, на основании которой создается каталог гало. Затем в каждое гало добавляется барионная материя. При этом учитываются различные процессы, такие как аккреция газа из родительского гало, звездообразование, активность в ядрах галактик, обратная связь, истечения газа, образование диска, балджа и прочее. Конкретные способы учета этих процессов весьма разнообразны. В отличие от метода «прямой эволюции» в полуаналитическом методе для получения информации об эволюции темных гало вместо эволюции функций масс используются численные модели.

Для задания свободных параметров полуаналитических моделей также, как и в других методах, могут быть использованы разнообразные подходы. Например, итерационный метод, как в работе [132]. В последние годы полуаналитические модели, основанные на численных расчетах распределения темной материи, получили большое развитие. В частности, они позволяют проследить детальную картину эволюции галактик и, как следствие, получить функции масс разных компонент, зависимость между звездной массой и массой гало на

разных z функции светимости, диаграммы цвет-величина, соотношения Талли-Фишера, диаграмму цвет-масса, эволюцию темпа звездообразования с красным смещением, распределение темпов звездообразования в галактиках на разных z , зависимость звездной массы балджа от общей массы балджа, эволюцию плотности звезд ρ_* [$M_\odot \text{Mpc}^{-1}$] от z , корреляцию между массами черных дыр и массами балджей, функцию светимости квазаров, эволюцию доли активных галактических ядер, эволюцию функции масс черных дыр.

Следует отметить, что используемый в настоящей работе подход можно отнести к этому виду, а именно, к полуаналитическому подходу.

2.3 Описание модели

2.3.1 Требования к модели

Целью создания модели является определение возможностей наблюдения объектов с малыми потоками излучения ("слабых" объектов) и исследования крупномасштабной структуры Вселенной с помощью космических обсерваторий, работающих в дальнем ИК диапазоне и имеющих апертуру около 10 м. За основу взяты следующие параметры обсерватории Миллиметрон ([85])

1. Угловое разрешение телескопа ограничено дифракцией на длинах волн $\lambda > 300$ мкм и не хуже 5 секунд дуги на более коротких волнах. Однако, даже при «дифракционном» разрешении на 100 мкм разрешение не будет лучше 2 секунд дуги. Это означает, что галактики на красных смещениях $z > 0.5$ можно считать точечными источниками.
2. Чувствительность широкополосной фотометрии может достигать 0.1 мкЯн на длинах волн 100–400 мкм, и модельный каталог галактик должен быть статистически полным до таких потоков.
3. Поле зрения телескопа составляет около 6 угловых минут, поэтому площадки модельного обзора в несколько квадратных градусов должно быть достаточно для моделирования наблюдений.

4. Модель должна учитывать нелинейный характер крупномасштабного распределения материи во Вселенной, в частности, наличие скоплений и сверхскоплений галактик, которые могут повлиять на наблюдаемые характеристики фона (как напрямую, так и за счет гравитационного линзирования).

Исходя из выше перечисленных требований была построена основанная на космологическом численном расчете полуаналитическая модель. Ее построение состояло из следующих основных этапов:

1. Представление каталога гало в виде заполненного конуса.
2. Присвоение каждому гало светимости .
3. Расчет потоков от каждой галактики для заданной длины волны (спектрального окна).
4. Получение карты неба с помощью интерполяции «облако в ячейке».
5. Свертывание карты с диаграммой направленности телескопа.

Главным отличием данной модели от существующих в литературе для дальнего ИК диапазона является учет нелинейной крупномасштабной структуры Вселенной. Далее более детально рассмотрим перечисленные этапы.

2.3.2 Конус, свойства гало и крупномасштабная структура

Для получения каталога гало используется база данных COSMOSIM, из которой были извлечены все доступные срезы по времени численной модели Small MultiDark Planck [133] с размером куба $400 \text{ Мпк}/h$ (где $h = H_0/100$, H_0 – современное значение постоянной Хаббла). Конус имеет размер $1^\circ \times 1^\circ$, что соответствует размеру его основания примерно $100 \text{ Мпк}/h$ при $z = 6.2$. Ось конуса пересекает куб численной модели под таким углом, что одна и та же часть куба попадает в конус лишь единожды. В зависимости от расстояния до вершины конуса определялся наиболее близкий срез по времени, из которого были взяты координаты гало. Это обеспечило непрерывность элементов крупномасштабной структуры вдоль конуса, см. Рис. 2.1.

Было проверено, что увеличение границы минимальной массы до $10^{11} M_\odot$ или уменьшение максимальной массы гало до $10^{14} M_\odot$ не влияет в пре-

Таблица 2 — Параметры конуса модельного обзора

Параметр	величина
минимальное красное смещение	0.30
максимальное красное смещение	6.19
минимальная масса	$3 \times 10^{10} M_{\odot}$
максимальная масса	$2.56 \times 10^{14} M_{\odot}$
число гало	1285307
число гало $M > 10^{13} M_{\odot}$	936
число гало $M > 10^{14} M_{\odot}$	15

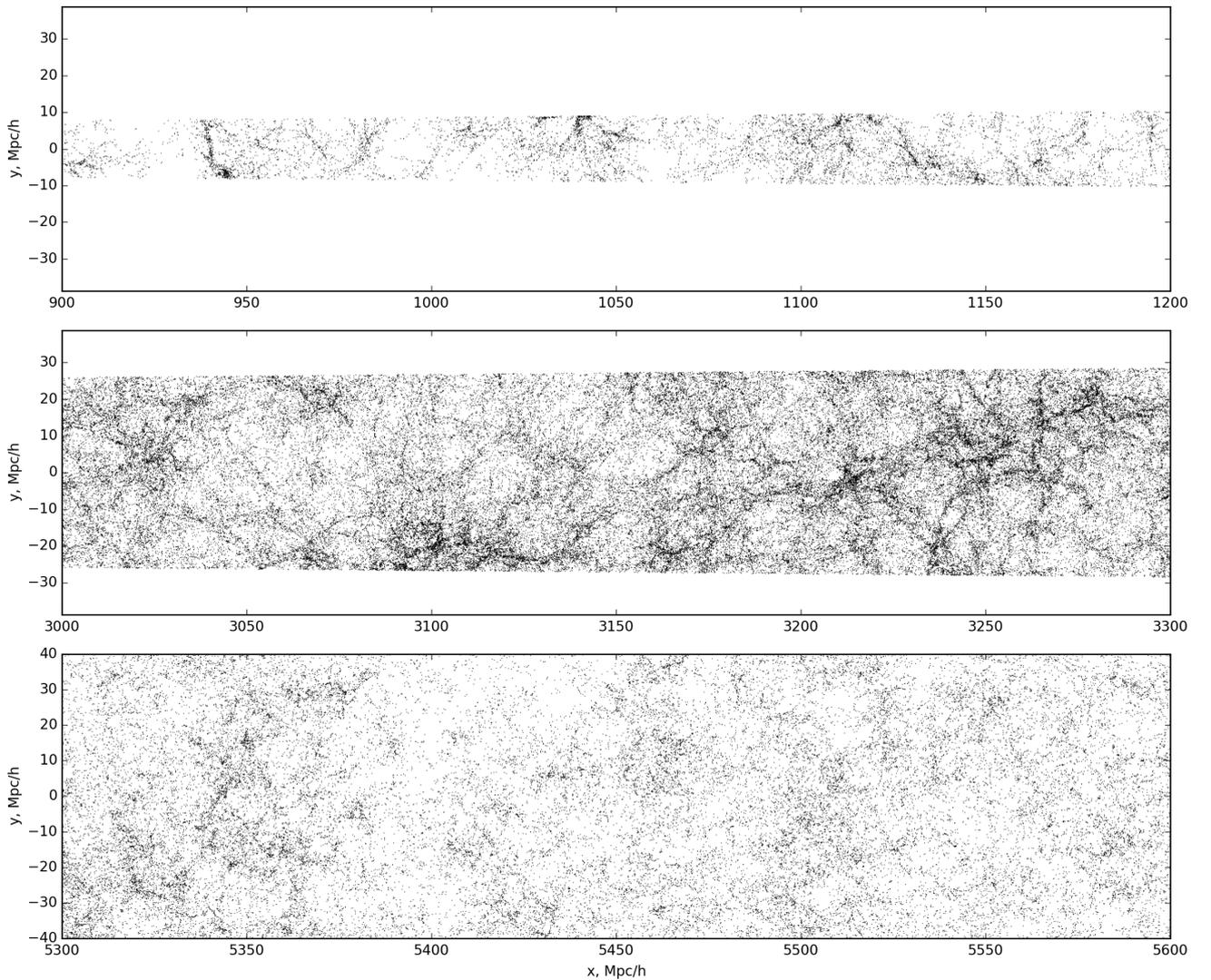


Рисунок 2.1 — Несколько участков проекции конуса на плоскость XY в сопутствующих координатах. Ось X направлена вдоль оси конуса. Каждая точка — отдельное гало. Иллюстративный рисунок из работы **A2**: [2]

делах точности нашего метода на полученные результаты. Граница максимального красного смещения также не влияет на результаты. Изменение границы минимального красного смещения заметно сказывается на подсчетах источников на наиболее коротких длинах волн, 70 – 100 мкм. Наилучшее соответствие известным подсчетам источников наблюдается при значении границы $z = 0.54$, см. Рис. 2.2.

Параметры конуса представлены в Таблице 2. Конус содержит 15 скоплений галактик и около 900 групп. Для анализа крупномасштабной структуры в данном конусе был использован метод минимального покрывающего дерева, широко применяемый для поиска сверхскоплений [134–136]. При этом задаются два параметра: максимальная пороговая длина ветви, необходимая для включения ветви в кластер, и минимальное число объектов в кластере. Варьировались оба параметра. Например, гистограмма распределения ветвей дерева по длине имеет максимум при длине 0.5 Мпк/h. Если принять это значение в качестве пороговой длины, а в качестве порогового числа выбрать 100 объектов, то в нашем каталоге алгоритм обнаруживает 11 скоплений, размер которых не превышает 20 Мпк/h.

2.3.3 Гравитационное линзирование

Для учета гравитационного линзирования в созданном каталоге перебираются все возможные пары близких по угловому расстоянию гало и вычисляются коэффициенты усиления излучения более удаленного в этой паре от наблюдателя гало (источника) при линзировании на более близком гало (линзе). Коэффициенты усиления, μ , вычислялись для двух простых моделей линзы, а именно, для модели точечной линзы (PL) и модели сингулярной изотермической сферы (SIS). Как хорошо известно (см., например, [137]), выражение для коэффициента усиления записывается следующим образом для модели PL:

$$\mu(M_L, D_L, D_S, \beta) = \frac{\tilde{\beta}^2 + 2}{\tilde{\beta} \sqrt{\tilde{\beta}^2 + 4}} \quad (2.1)$$

и для модели SIS:

$$\mu(M_L, D_L, D_S, \beta) = \begin{cases} \frac{2}{\tilde{\beta}}, & \tilde{\beta} \leq 1 \\ \frac{\tilde{\beta}+1}{\tilde{\beta}}, & \tilde{\beta} > 1 \end{cases}, \quad (2.2)$$

где

$$\tilde{\beta} = \frac{\beta}{\alpha_0}, \quad (2.3)$$

β – угловое расстояние между источником и линзой, α_0 – характерное угловое расстояние, зависящее от красного смещения источника z_S и красного смещения линзы z_L .

Характерное угловое расстояние α_0 записывается следующим образом:

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{4GM_L}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_S D_L (1 + z_L)}}, \quad (2.4)$$

где D_L и D_S – сопутствующее расстояние от наблюдателя до линзы и до источника соответственно, D_{LS} – сопутствующее расстояние между линзой и источником, z_L – красное смещение линзы, c – скорость света, G – гравитационная постоянная [137].

Для целей настоящей работы учитывались события «сильного» гравитационного линзирования с коэффициентом усиления не менее 2, что позволило в последующем корректно сопоставить полученные нами результаты для подсчета источников с результатами из работы [112]. Кроме того, была учтена протяженность источников излучения. При этом предполагалось, что источники представляют собой круги с однородной поверхностной яркостью с радиусом ρ , равным 0.25 секунды дуги. В этом случае для модели PL максимальный коэффициент усиления (см. [138]):

$$\mu_{max} = \frac{\sqrt{\gamma^2 + 4}}{\gamma}, \quad \gamma = \frac{\rho}{\alpha_0}, \quad (2.5)$$

Как показывают выполненные в настоящей работе расчеты (см. Рис.2), учет событий сильного гравитационного линзирования с коэффициентом усиления не менее 2 в модели SIS оказывается важным при подсчете источников на потоках излучения, больших 10 мЯн, для длин волн 70, 250, 500 мкм и больших 1 мЯн на длине волны 1.2 мм. На Рис.2 сплошной линией показаны результаты с учетом гравитационного линзирования и для сравнения пунктирной линией -

без учета линзирования. Модель PL дает несколько худшее согласие с подсчетами источников. В модели обратной эволюции из работы [112] линзирование также было учтено и получены схожие результаты.

2.3.4 Определение светимостей галактик

В настоящей работе использовано одно из наиболее часто применяемых соотношений массы гало M и светимости галактик L из работы [139]:

$$L(M, z) = L_0(1 + z)^\eta \log(M) \exp\left(-\frac{(\log(M) - \log(M_0))^2}{2\sigma_L^2}\right), \quad (2.6)$$

где $\log(M_0) = 12.6$, $\sigma_L^2 = 0.15$, $\eta = 3.16$ при $z < 2$ и $\eta = 0$ при $z > 2$, $L_0 = 5 \times 10^9 L_\odot$ для интегральной светимости в диапазоне от 8 до 1000 мкм в системе отсчета галактики. Вид данного соотношения масса-светимость основан на том факте, что звездообразование наиболее эффективно в ограниченном диапазоне масс гало, в районе массы M_0 [140]. Для масс много выше и ниже данной звездообразование подавляется эффектами обратной связи: фотоионизацией, вспышками сверхновых, активностью ядра галактики [141–143]. Параметры модели L_0 , M_0 и σ_L определялись путем подгонки подсчетов числа источников к результатам из работы [112], как к наилучшей из существующих аппроксимации подсчетов источников в разных диапазонах. Заметим, что модель обратной эволюции из этой работы является обновленной версией более ранней модели, предложенной в работе [110].

Для определения модельных параметров L_0 , M_0 и σ_L были использованы данные о подсчетах числа источников как функции потока на длинах волн $\lambda = (70, 110, 160, 250, 350, 500, 850, 1200, 2000)$ мкм. Параметры определялись путем минимизации среднеквадратичного отклонения подсчетов источников в тех же интервалах по потоку, что и в данных [112]. При этом для наиболее точного воспроизведения подсчетов слабых объектов сравнивались интегральные подсчеты.

Для каждой длины волны вычислялся монохроматический поток, т.е. информация о полосе пропускания не использовалась. Отметим, что данные, при-

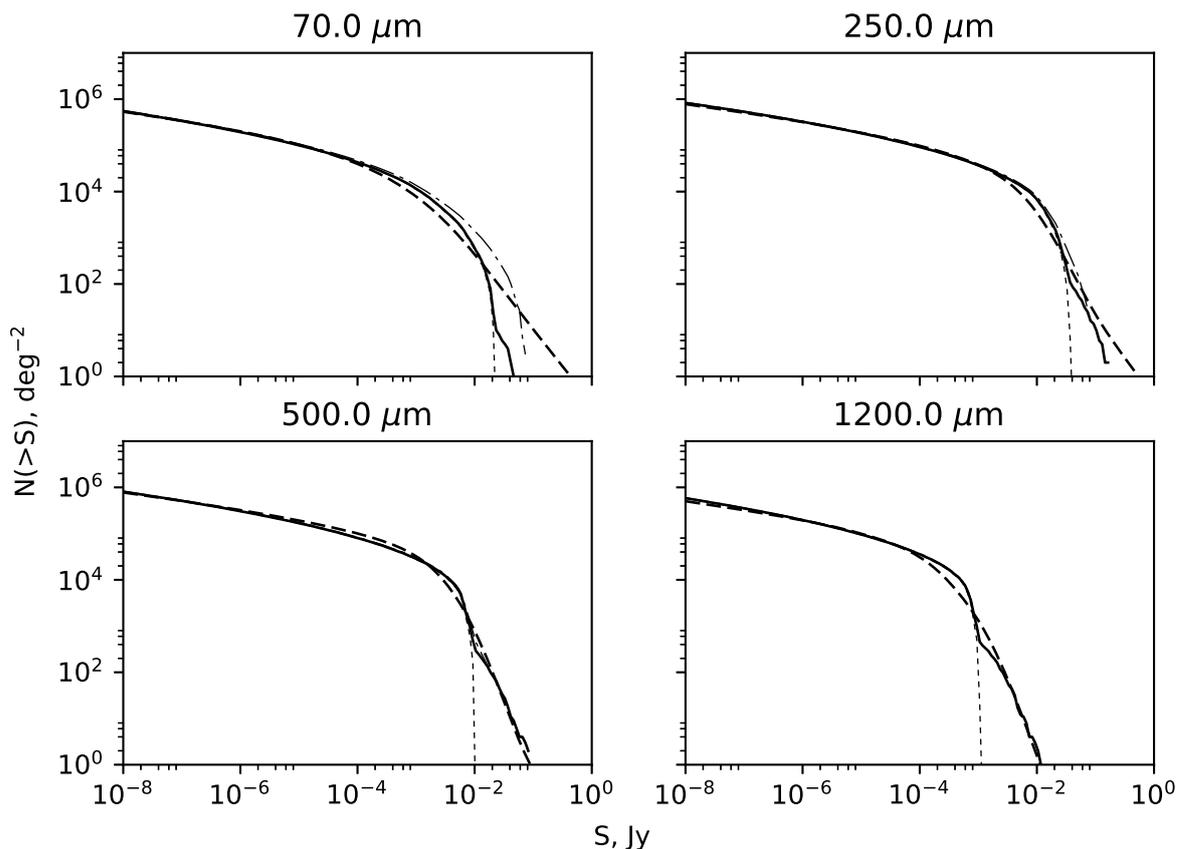


Рисунок 2.2 — Подсчеты числа источников в нашей модели с учетом эффектов гравитационного линзирования (сплошные линии), без учета гравитационного линзирования (пунктирная линия) и в модели [112] (штриховая линия) на 70, 250, 500 и 1200 мкм. Тонкая штрих-пунктирная линия – наша модель для случая минимального красного смещения $z = 0.3$.

Совместный результат диссертанта из работы **A2**: [2]

веденные в работе [112], получены на реальных телескопах в полосах пропускания конечной ширины. Подгонка этих данных без учета формы полосы пропускания автоматически корректирует параметры нашей модели так, что получаемые в ней результаты являются уже не монохроматическими, а полученными с усредненной полосой пропускания по всем приборам, данные с которых использовались в работе [112].

Подсчеты источников в нашей модели и в моделях [112] показаны на Рис. 2.2. Как видно из этого рисунка, на более длинных волнах наблюдается хорошее согласие результатов, полученных в обеих моделях. Тогда как на коротких длинах волн для потоков 10-100 мЯн наблюдается расхождение.

2.3.5 Спектры галактик

Форма спектрального распределения энергии была взята из работы [144]. Определенная описанным выше способом светимость задает ее амплитуду для каждой галактики. Использование лишь одного спектра для всех галактик является серьезным упрощением модели. В принятом в настоящей работе подходе каждая галактика имеет свое уникальное гало, и можно придумать большое количество способов задания типа галактики в зависимости от истории образования данного гало, его пространственного окружения, углового момента и т.д. Анализ этих способов выходит за рамки данной работы. Тем не менее, для сравнения также были использовали несколько других вариантов спектра галактики, которые были взяты из библиотеки спектров из работы [145], где представлено 105 модельных спектров. Были выбраны два крайних варианта спектра, с наибольшей и наименьшей долей излучения в дальнем ИК диапазоне, после чего процедура подгонки подсчетов источников была повторена. В результате, подсчеты изменились не более чем на 30%, что сравнимо с точностью нашей модели.

Следствием применения единого спектра для всех типов галактик является небольшой разброс по светимости галактик при фиксированной массе. Этот разброс вызван зависимостью светимости от красного смещения. Например, галактики с массой гало $10^{13} M_{\odot}$ имеют ИК светимости от 10^{10} до $10^{11} L_{\odot}$, а галактики с массой $10^{11} M_{\odot}$ – от 10^6 до $10^7 L_{\odot}$. Полученный разброс в несколько раз меньше, чем наблюдается, например, у галактик SDSS на малых красных смещениях [146].

2.3.6 Сравнение с наблюдениями обсерватории ALMA

Недавние глубокие наблюдения на обсерватории ALMA [147; 148] впервые позволили получить данные о подсчетах источников на длинах волн 1.1 – 1.3 мм с потоками 20 – 100 мкЯн. Мы сравнили эти подсчеты с предсказаниями нашей модели, результаты представлены в Таблице 3. Как видно из данной таб-

лицы, предсказания нашей модели находятся в хорошем соответствии (с учетом ошибок измерений) с результатами наблюдений на обсерватории ALMA.

2.4 Практическое применение модели

Разработанная модель позволила исследовать проблему путаницы при наблюдениях на телескопе Миллиметрон: при использовании критерия полноты (см. ниже) предел путаницы составляет 14 мкЯн на длине волны 100 мкм, 0.6 мЯн на длине волны 300 мкм, 1 мЯн на длине волны 1 мм. Эти показатели примерно в 10 раз лучше, чем у телескопа обсерватории им. Гершеля с размером апертуры 3.5 м. Измерен пространственный спектр мощности анизотропии модельного фона, вид спектра оказался близок к полученному при анализе наблюдений проведенных на обсерватории им. Гершеля и опубликованному в работе [139].

2.4.1 Выделение точечных источников и предел путаницы

Существуют по крайней мере два критерия определения предела путаницы [111]: фотометрический и критерий плотности числа источников. Фотометрический критерий применяется к источникам, которые слишком слабые, чтобы их можно было зарегистрированными по отдельности. Критерий плотности числа источников напротив применяется к источникам, которые могут быть зарегистрированы как отдельные объекты. При наличие модельной карты неба возможно также провести изучение полноты каталога точечных источников, извлеченных из этой карты. Такой метод наиболее близок к реальным измерениям, тем не менее результат может зависеть от применяемого алгоритма выделения источников. Для оценки шума путаницы были использованы три различных критерия — вероятностный, фотометрический и критерий плотности источников [111].

Таблица 3 — Сравнение с подсчетами источников на ALMA

Параметер	Наблюдения	Наша модель
$\lambda = 1.1$ мм [147]		
Интегральный поток при $S > 130$ мкЯн	> 17.2 Ян град $^{-2}$	14.8 Ян град $^{-2}$
$dN/d(\log_{10} S)$ при $S = 130$ мкЯн	$10_{-4}^{+7} \times 10^4$ град $^{-2}$	3.5×10^4 град $^{-2}$
$\lambda = 1.3$ мм [147]		
Интегральный поток при $S > 60$ мкЯн	> 12.9 Ян град $^{-2}$	9.5 Ян град $^{-2}$
$dN/d(\log_{10} S)$ при $S = 60$ мкЯн	$11_{-7}^{+14} \times 10^4$ град $^{-2}$	3.8×10^4 град $^{-2}$
$\lambda = 1.2$ мм [148]		
Интегральный поток при $S > 20$ мкЯн	$22.9_{-5.6}^{+6.7}$ Ян град $^{-2}$	13.1 Ян град $^{-2}$
$dN/d(\log_{10} S)$ при $S = 20$ мкЯн	3.2×10^5 град $^{-2}$	5.9×10^4 град $^{-2}$

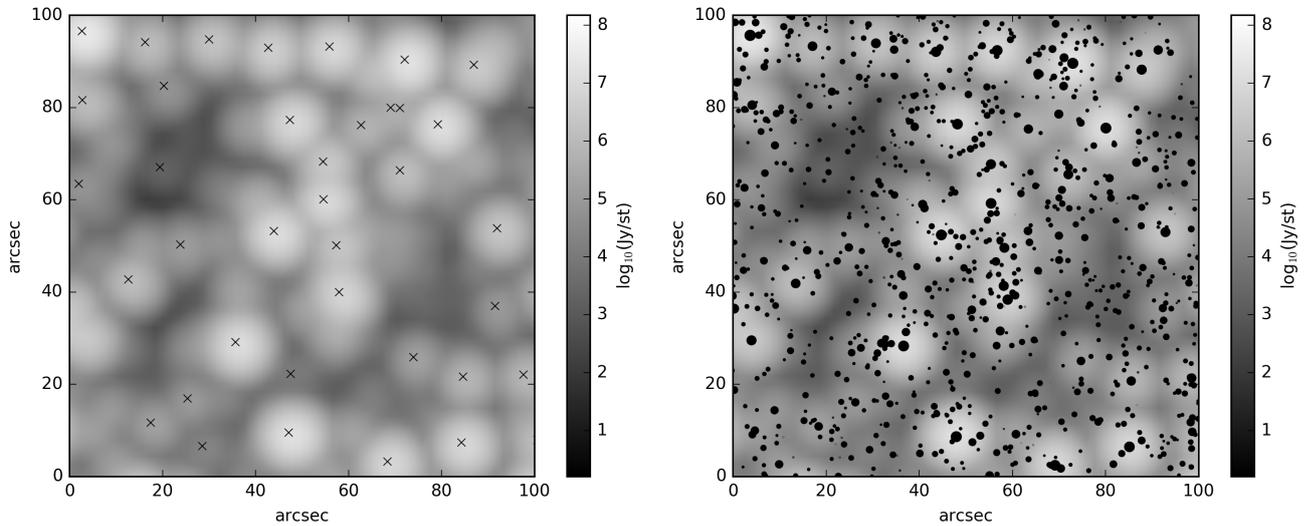


Рисунок 2.3 — Пример участка карты модельного фона неба размером 100 на 100 угловых секунд на длине волны 300 мкм. Слева крестами показаны пики интенсивности, найденные с помощью вторых производных. Справа точками показаны модельные галактики. Размер точки пропорционален логарифму потока от галактики. Иллюстративный рисунок из работы **A2**: [2]

Рис. 2.3 иллюстрирует проблему путаницы, где справа показано распределение модельных галактик на участке неба. После свертки с диаграммой направленности телескопа наиболее яркие галактики создают вокруг себя ореолы, существенно превышающие по размерам $\lambda/D = 6''$, и в которых теряется излучение соседних более слабых галактик. В итоге пики интенсивности на карте ИКФ (на Рис. 2.3 слева) соответствуют наиболее ярким галактикам.

Результаты определения пределов путаницы для двух значений апертуры телескопа: 3.5 м (Herschel) и 10 м (Миллиметрон) для четырех перечисленных выше критериев приведены в Таблице 4. Из этой Таблицы видно, что предсказываемые в нашей модели по критерию полноты пределы путаницы для 3.5-метрового телескопа близки действительно найденным из наблюдений телескопа Herschel. Так для прибора SPIRE на длине волны 250 мкм [149] предел равен 5.8 мЯн, для прибора PACS на длине волны 100 мкм он составляет 0.27 мЯн [150].

Таблица 4 — Предел путаницы в дальнем ИК/субмиллиметровом диапазоне

Апертура/критерий	100 мкм	300 мкм	1000 мкм
3.5 м (Herschel)			
Плотность источников	80 мкЯн	10 мЯн	3 мЯн
Фотометрический (из подсчетов)	0	6 мЯн	5 мЯн
Фотометрический (из карты)	60 мкЯн	20 мЯн	13 мЯн
Полнота 50%:			
поиск максимумов	0.2 мЯн	9 мЯн	4 мЯн
getsources монохром	0.5 мЯн	14 мЯн	12 мЯн
getsources многоволновый	0.5 мЯн	3 мЯн	2 мЯн
10 м (Миллиметрон)			
Плотность источников	1 нЯн	0.3 мЯн	1 мЯн
Фотометрический (из подсчетов)	0	0.3 мкЯн	1 мЯн
Фотометрический (из карты)	40 мкЯн	0.3 мЯн	4 мЯн
Полнота 50%:			
поиск максимумов	14 мкЯн	0.6 мЯн	1 мЯн
getsources монохром	9 мкЯн	0.7 мЯн	1 мЯн
getsources многоволновый	10 мкЯн	0.1 мЯн	1 мЯн

Для проверки влияния крупномасштабной структуры на эффект путаницы координаты галактик на небе были перемешаны, а потоки от них были оставлены неизменными. В пределах точности нашей модели для всех пред-

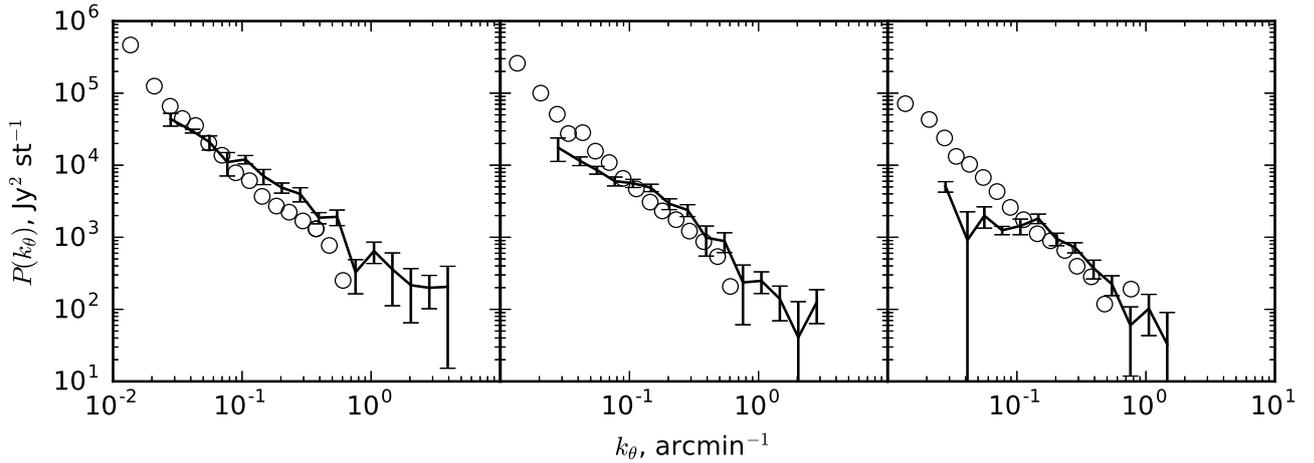


Рисунок 2.4 — Спектр мощности пространственной анизотропии ИК-фона неба на длинах волн 250, 350 и 500 мкм (слева направо). Круги – результаты работы [139] (ошибки не показаны), сплошная линия – данная работа.

Иллюстративный рисунок из работы **A2**: [2]

ставленных в Таблице 4 способов определения предела путаницы отличия не обнаружено.

2.4.2 Крупномасштабная структура

Хорошо известно, что ИКФ анизотропен. Так изучение спектра мощности пространственной анизотропии, полученного из наблюдений на телескопе Herschel в работе [139] показало, что этот спектр может быть объяснен в рамках аналитической модели кластеризации гало. Построенный спектр мощности для модельных карт ИКФ, полученных в нашей модели для апертуры 3.5 м, сравнивается со спектром мощности из работы [139]. Эти спектры показаны на Рис. 2.4.

Как видно, наша модель успешно воспроизводит спектр анизотропии фона в пределах ошибок измерений (ошибки измерений на телескопе Herschel на рисунке не показаны).

2.5 Заключение

В настоящей работе построена полуаналитическая модель ИК фона неба, новым элементом которой является учет данных космологического расчета крупномасштабной структуры Вселенной, а также получение модельных карт ИКФ, к которым можно применять различные алгоритмы поиска источников. Разработанная модель показывает хорошее согласие с известными данными о подсчетах источников и спектре мощности пространственной анизотропии ИК фона в диапазоне длин волн от 100 мкм до 2 мм. Эта модель была использована для определения предела путаницы для будущих космических телескопов дальнего ИК диапазона 10-метрового класса, а также для сравнения кластеризации пиков интенсивности фона с реальной крупномасштабной структурой.

На основе полученных данных о подсчете источников для оценки предела путаницы были использованы критерий плотности источников и фотометрический критерий. Полученные с помощью этих критериев величины предела путаницы сравнивались между собой, а также с величиной предела путаницы, полученной непосредственно из карты ИК-фона с помощью критерия полноты. Важно отметить, что полученные с помощью критерия полноты из модельной карты пределы путаницы для 3.5-метрового телескопа оказались близки к найденным по наблюдениям телескопа Herschel. Из чего можно сделать вывод, что при апертуре телескопа 3-10 м оценочные критерии хорошо работают на сравнительно длинных волнах, $\lambda \geq 300$ мкм, и плохо на коротких.

При длинах волн около 100 мкм из карт, полученных в режиме широкополосной фотометрии с 10-метрового телескопа, можно будет выделять компактные источники с плотностью потока от 10 мкЯн, что более чем на порядок лучше, чем для телескопа с диаметром зеркала 3.5 м. Для длины волны 300 мкм, на которую приходится максимум интенсивности ИК фона, предел путаницы составит около 0.6 мЯн, что также на порядок ниже предела путаницы, измеренного в ходе работы телескопа Herschel. Для длины волны 1 мм 10-метровый телескоп даст четырехкратный выигрыш по пределу путаницы, достигнув 1 мЯн.

ИК фон в нашей модели демонстрирует значительные отличия от равномерного случайного распределения источников на небе. При этом построенный

спектр мощности пространственной анизотропии фона в рамках разработанной модели показывает хорошее согласие со спектром, полученным из наблюдений обсерватории Herschel. Таким образом, крупномасштабная структура Вселенной отчетливо проявляется на картах ИК фона. При этом крупномасштабная структура не оказывает заметного влияния на предел путаницы, найденный из модельных карт. В литературе рассматриваются способы борьбы с пределом путаницы: в работе [151] представлены оценки возможности использования спектральной информации для уменьшения путаницы на планируемом японском космическом телескопе SPICA. В работе [152] изучается возможность использования информации из оптического диапазона для уменьшения путаницы в дальнем ИК на снимках телескопа им. Гершеля. Необходимо проведение подобных исследований и для Миллиметрона и других планируемых обсерваторий, для чего планируется использовать разработанную нами модель.

Глава 3. Первичные Черные Дыры в Ранней Вселенной: Симуляции Темной Материи

3.1 Введение

Первичные черные дыры (ПЧД), впервые предложенные Я. Б. Зельдовичем и И. Д. Новиковым [34] вызывают интерес уже почти 50 лет, несмотря на то, что в их пользу до сих пор нет доказательств. ПЧД могут образоваться на ранних стадиях эволюции Вселенной из-за коллапса больших флуктуаций плотности энергии [35; 153], при этом примерная связь между массами ПЧД на момент формирования и массой под горизонтом выглядит следующим образом:

$$M \sim \frac{c^3 t}{G} \sim 10^{15} \left(\frac{t}{10^{-23}} \right). \quad (3.1)$$

Следовательно, ПЧД могут охватывать огромный диапазон масс: те, которые образовались в планковское время (10^{-43} с), будут иметь планковские массы (порядка 10^{-5} г), тогда как те, что образовались за 1 с, достигли бы $10^5 M_\odot$, что сравнимо с массой черных дыр, предположительно находящихся в ядрах галактик. Однако, ПЧД с массой меньше 10^{15} г к настоящему времени испарились бы [154], что привело бы ко многим интересным космологическим последствиям [155]. Исследования таких последствий наложили некоторые важные ограничения на модели ранней Вселенной и, что более важно, в дальнейшем испаряющиеся ПЧД были привлечены для объяснения некоторых явлений: например, фона внегалактического [156; 157] и галактического [158; 159] гамма-излучения, антивещества в космических лучах [160; 161], аннигиляционного излучения из центра Галактики [162; 163], реионизации пред-галактической среды [164] и некоторых коротких гамма-всплесков [165; 166]. Однако, для этих явлений обычно есть и другие возможные объяснения, поэтому окончательных доказательств испарения ПЧД пока не существует.

Таким образом, внимание переключилось на ПЧД с массами более 10^{15} г, на которые излучение Хокинга существенно не влияет. Присутствием таких ПЧД можно объяснить различные астрофизические феномены, такие как формирование сверхмассивных черных дыр в ядрах галактик [167; 168] или гене-

рация крупномасштабной структуры Вселенной [169]. Но, пожалуй, самая захватывающая возможность - это то, что ПЧД могут входить в состав темной материи (ТМ), которая составляет 27% критической плотности Вселенной [7]. Эта идея восходит к самым ранним дням исследований ПЧД [170] и в последующие годы многократно обсуждалась в литературе [32; 36–38; 171–174].

ПЧД недавно привлекли к себе много внимания в связи с событиями, наблюдаемыми гравитационно-волновой обсерваторией LIGO с помощью усовершенствованного лазерного интерферометра [30; 175–180]¹.

Хотя в настоящее время гипотеза о существовании ПЧД пока не доказана и не опровергнута, сами по себе наблюдательные ограничения на их распространенность представляют собой мощный и уникальный метод исследования ранней Вселенной на малых масштабах, недоступных для изучения другими методами [181–183]. Наиболее важные потенциальные ограничения на содержание ПЧД в диапазоне масс $10 - 30 M_{\odot}$ могут быть получены из наблюдений LIGO при допущении, что наблюдаемые события связаны со слиянием пар первичных черных дыр. Несмотря на то, что некоторые из событий LIGO [184] теперь считаются имеющими астрофизическое происхождение [185], происхождение некоторых других событий вполне может оказаться первичным [180]. С другой стороны, если бы ПЧД составляли значительную часть ТМ, то скорость их слияния создала бы фон гравитационных волн (ГВ), который был бы намного больше, чем тот, который в настоящее время наблюдается LIGO [186–188]. Также иначе бы проявлялись и другие эффекты, например, связанные с гравитационным линзированием сверхновых [189]. Однако ограничения линзирования сверхновых были повторно проанализированы [190] и было показано, что они согласуются с наблюдениями. Аналогично, ограничения LIGO также подвержены большой теоретической неопределенности.

3.2 Методы

Для надежной оценки сигнатур гравитационных волн (ГВ) от слияний пар ПЧД требуется хорошее понимание процесса образования пар ПЧД и их

¹Открытые оповещения коллаборации LIGO/Virgo по результатам наблюдательной сессии O3/2019 можно найти по адресу <https://gracedb.ligo.org/superevents/public/O3/>

последующего взаимодействия с окружающей средой, которое может нарушить эти двойные системы (например, см. [191] или [192]). Несмотря на то, что основная часть этой главы посвящена двойным ПЧД, мы также рассматриваем эффекты общей теории относительности (ОТО) при близких пролетах по гиперболической траектории ² (как было предложено в [193]) и то, как правильное описание этих событий может повлиять на наши окончательные результаты.

В этой главе мы представляем численную модель, описывающую эволюцию ПЧД с массами $\sim 30 M_{\odot}$ на самых ранних стадиях Вселенной и вплоть до красных смещений $z \approx 3.0$. Несмотря на вышеупомянутые ограничения на количество ПЧД с такими массами, в нашей модели для целей тестирования мы также рассматриваем крайний случай, когда вся ТМ состоит из ПЧД, т.е. $f_{PВH} = \frac{\Omega_{PВH,0}}{\Omega_{m,0}} = 1.0$, где $\Omega_{PВH,0}$ - параметр плотности ПЧД на красном смещении $z = 0$, а $\Omega_{m,0}$ - параметр полной плотности вещества при том же красном смещении. Однако при этом наши основные выводы получены из моделирования с гораздо меньшими фракциями, вплоть до $f_{PВH} = 10^{-4}$.

Мы посчитали серию космологических моделей N тел (*n-body*) для темной материи, используя модифицированную версию космологического кода TREEPM GADGET-2. Насколько нам известно, до нашей работы космологические *n-body* коды применялись для изучения проблем ПЧД только [194]). Хотя стоит отметить, что авторы преследовали несколько иные цели, например, подробное и широкомасштабное исследование взаимодействия «нормальной» и «темной материи ПЧД», при этом, как отмечают сами авторы, «их численная модель не обладает достаточно высоким уровнем пространственного разрешения необходимого для расчетов параметров орбит отдельных ПЧД». В нашей работе при $f_{PВH} < 1.0$ мы разделяем ТМ на "*темную материю состоящую из ПЧД*", представленную в виде отдельных частиц, и "*обычную темную материю*", которая представлена как невозмущенная однородная среда.

Далее, мы изучаем сложные процессы образования, разрушения и слияния пар ПЧД при помощи анализа орбит частиц ПЧД в контексте задачи двух тел, где одно тело является искомой частицей ПЧД, а второе тело является одним из его соседей с минимальной полной энергией E . Полная энергия вычисляется как произведение удельной орбитальной энергии ϵ и приведенной

²В этом контексте «пара» ПЧД не обязательно является *гравитационно-связанной парой*, если специально не указано обратное, и в целом их следует воспринимать просто как «две взаимодействующие частицы».

массы $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, где $m_1 = m_2 = M$ - масса ПЧД:

$$E = \mu \epsilon = \frac{M}{2} \left(\frac{v^2}{2} - \frac{2GM}{r} \right), \quad (3.2)$$

где v - относительные скорости частиц (включая хаббловскую), r - радиус-вектор в физических координатах. Мы оцениваем стабильность пары в целом и как эта стабильность зависит от численных ошибок, связанных с параметром гравитационного сглаживания и шага по времени (см. Раздел 3.4). Кроме того, как упоминалось выше, мы также рассматриваем возможность захвата пары из-за эффектов ОТО при близких гиперболических пролетах. Процесс слияния как связанных, так и несвязанных пар исследуется путем оценки скорости потери ими энергии из-за излучения гравитационных волн. Условие слияния определяется как

$$\sum_{i=1}^n T |\dot{E}| \geq \frac{GM^2}{2|a|} \quad (3.3)$$

где \dot{E} - скорость потери энергии парой из-за излучения гравитационных волн, T - текущий орбитальный период пары, а a - большая полуось пары. ($a < 0$ для гиперболической орбиты). Поскольку у большинства наших пар эксцентриситет близок к $e \approx 1$, мы можем с уверенностью сказать, что пара излучает гравитационные волны только тогда, когда ее частицы проходят перицентр. Следовательно, сумма ограничена числом полных периодов, n , в течение которых пара оставалась гравитационно-связанной, или единицей в случае гиперболической орбиты. Потери энергии можно оценить как

$$\dot{E} = \frac{64G^4 M^5}{5c^5 a^5} g(e) \quad (3.4)$$

где

$$g(e) = \begin{cases} \frac{24 \cos^{-1}(-\frac{1}{e}) (1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4) + (e^2 - 1)^{1/2} (\frac{301}{6} + \frac{673}{12} e^2)}{(e^2 - 1)^{7/2}}, & e \geq 1, \\ \frac{24\pi}{(1 - e^2)^{7/2}} (1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4), & e < 1, \end{cases} \quad (3.5)$$

где e - эксцентриситет пары, G - гравитационная постоянная, а c - скорость света в вакууме, соответственно [195; 196]. E , и \dot{E} вычисляются для значений параметров орбиты, которые пара имеет в данный момент. Если накопленная

излучаемая энергия данной пары превышает E , и пара не разрушается в течение этого времени, пара считается “слившейся”. Точное описание алгоритма см. В Разделе 3.5.

Глава организована следующим образом:

1. В Разделе 3.3 мы подробно описываем нашу численную модель и представляем список параметров, используемых для запуска симуляций N тел.
2. В Разделе 3.4 мы вычисляем вероятности образования пар ПЧД, начиная с эпохи радиационного доминирования. Затем мы оцениваем возможность разрушения пары из-за численных ошибок.
3. В Разделе 3.5 мы приводим наши оценки скорости слияния пар ПЧД в зависимости от фракции ПЧД в ТМ, включая гиперболические захваты из-за эффектов ОТО.
4. Наконец, мы оставляем Раздел 3.6 для обсуждения вопроса о том, могут ли ПЧД с массами порядка десятков масс Солнца составлять достаточно большую долю темной материи, чтобы объяснить явления гравитационных волн при помощи слияния пар ПЧД. .

3.3 Численные модели N тел с Первичными Черными Дырами

Как мы уже упоминали выше, нас в основном интересует поиск и анализ поведения *par* ПЧД. Поэтому их орбиты следует рассчитывать с достаточной точностью. Обычно в таких случаях используются методы прямой задачи N тел, которые в вычислительном отношении очень дороги для большого количества частиц. Вместо этого мы используем общедоступный *n-body* код **GADGET-2**³ [88], который широко используется для космологического моделирования. Этот код использует комбинированный алгоритм Tree + Particle Mesh (TreePM) для оценки гравитационного ускорения для каждой частицы путем разложения гравитационных сил на дальнедействующую составляющую, вычисленную с помощью методов Particle-Mesh [197; 198], и короткомасштабных взаимодействий от ближайших соседей с использованием древесных методов (Tree). Код являет-

³<http://www.mpa.mpa-garching.mpg.de/~volker/gadget/>

ся MPI-параллельным⁴ и может использоваться с периодическими граничными условиями и для сопутствующих координат. Алгоритмическая сложность кода в зависимости от количества частиц составляет $\mathcal{O}(\mathcal{N} \log \mathcal{N})$, поэтому он может обрабатывать большое количество частиц с разумными вычислительными ресурсами.

Моделирование проводилось на суперкомпьютере MareNostrum в Вычислительном Центре Барселоны (BSC-CNS)⁵ с использованием модифицированной версии GADGET-2, в которой свободные параметры кода были выбраны таким образом, чтобы вычисления были достаточно точными: то есть, чтобы пары ПЧД могли сформироваться и выжить, не разрушившись при этом из-за численных ошибок. Мы взяли длину гравитационного сглаживания $\epsilon = 0,001$ пк, а шаг по времени $\Delta t = 10^{-6}$ в $\log(a)$.

Эти параметры имеют значительное влияние на стабильность орбиты, поэтому мы убедились, что наш выбор является оптимальным, и что дальнейшее уменьшение как ϵ , так и Δt не приведет к значительному улучшению стабильности орбиты.

Предыдущие аналитические оценки показывают, что первые пары ПЧД начинают появляться примерно в эпоху равновесия плотности энергии излучения и материи ($z \sim 10^3$) [27; 33] или, в зависимости от доли ПЧД, еще раньше - в радиационно-доминированную эпоху. Следовательно, мы модифицировали космологические уравнения в коде GADGET-2 таким образом, чтобы они включали в себя компоненту излучения (стандартная версия GADGET-2 излучения не учитывает), поскольку мы начинаем моделирование с $z_{init} = 10^5$.

Как обсуждалось ранее, в данной работе мы сосредоточены на изучении процессов образования пар ПЧД для различных долей ПЧД к общей составляющей ТМ. Итак, когда $f_{PCH} < 1.0$, мы должны разделить ТМ на два типа: "ПЧД ТМ" и "обычную ТМ" (см. Раздел 3.2).

Как показано в Разделе 3.4, в нашем моделировании вириализованные структуры начинают формироваться уже при $z \approx 10^3$, что может быть вызвано начальным пуассоновским распределением ПЧД. Это существенно отличается от случая стандартной модели Λ CDM, где первые вириализованные структуры начинают формироваться при $z \simeq 40$. Поэтому мы предполагаем, что "нормальная ТМ" ведет себя как однородная среда в наших моделированиях. Тем

⁴т.е. оптимизирован для параллельных вычислений на многопроцессорных вычислительных системах

⁵<https://www.bsc.es/>

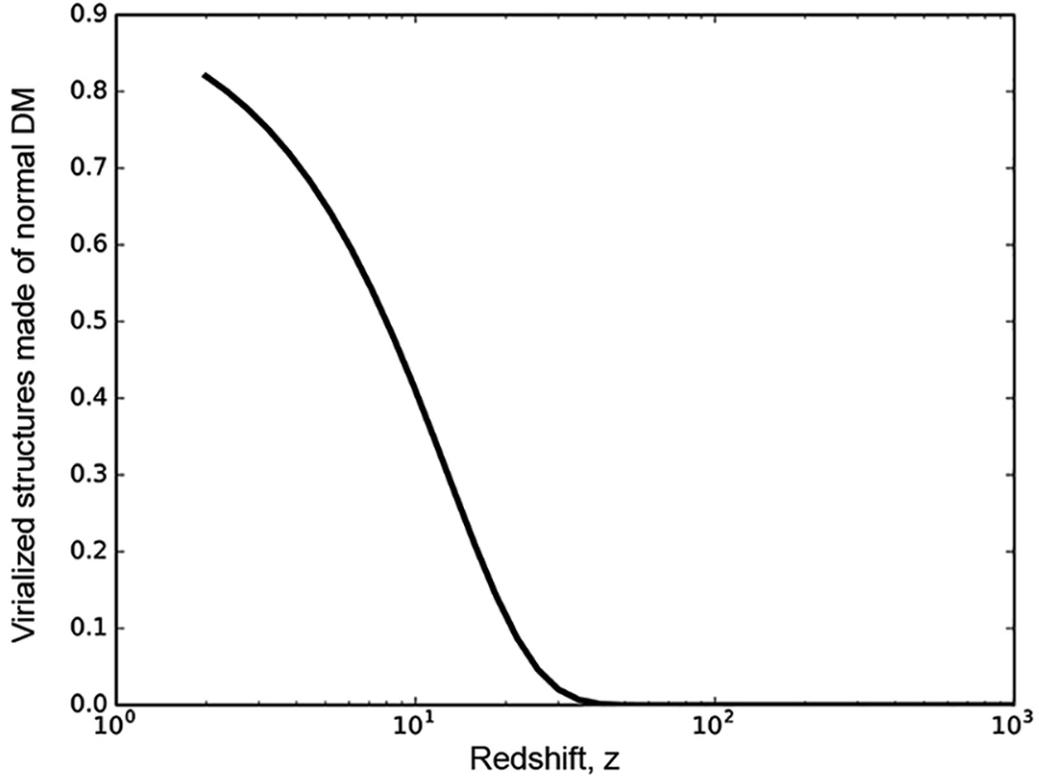


Рисунок 3.1 — Доля вириализованных структур, состоящих из *обычной ТМ* для гало массивнее $30 \text{--} 30 M_{\odot}$, как функция красного смещения z .

Совместный результат диссертанта из работы **A3**: [3]

не менее, позже мы обсудим, почему формирование вириализованных структур важно и как оно влияет на поведение пар ПЧД (см. Раздел 3.4.3).

Чтобы количественно определить диапазон красных смещений, в котором применимо это приближение, мы вычисляем долю вириализованной *обычной ТМ*, используя аналитический формализм Пресса-Шехтера для гало более массивных, чем $30 M_{\odot}$ (см. [39]). Мы находим, что доля вириализованных структур, состоящих из *обычной ТМ*, меньше 50% при $z > 10$. (см. Рисунок 3.1). Таким образом, присутствие *обычной ТМ* влияет на эволюцию ПЧД ТМ только через ее вклад в вычисление функции Хаббла в коде GADGET-2:

$$H(z) = H_0 \left[\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{m,0}(1+z)^3 - \Omega_{r,0}(1+z)^4 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.6)$$

Для наших целей этот подход кажется уместным с точки зрения требуемой точности и разумного использования вычислительных ресурсов, поскольку мы избегаем дорогостоящих расчетов взаимодействий между частицами *обычной*

ТМ и *ПЧД ТМ*. В данной работе мы так же пренебрегаем эффектом возможного образования гало ТМ вокруг ПЧД и ростом массы ПЧД за счет аккреции вещества [199].

Мы посчитали серию из шести численных моделей, включающих только темную материю. Пять из них соответствуют разным значениям доли ПЧД в диапазоне от $f_{PВH} = 1.0$ до $f_{PВH} = 10^{-4}$. Для оценки достоверности нашего анализа мы также выполнили дополнительное моделирование с долей ПЧД $f_{PВH} = 10^{-4}$, но с увеличением количества частиц. Во всех наших расчетах доля ПЧД представлена до $N_{total} = 10^6$ частиц с массой $30 M_{\odot}$. Начальные условия для частиц ПЧД вычислялись для $z = 10^5$ для всех численных моделей. В работах [188; 200; 201] из общих принципов было показано, что на момент формирования ПЧД не должны образовывать плотные кластеры (по крайней мере, если ПЧД формируются в результате коллапса гауссовых флуктуаций плотности порядка размера горизонта, а не в результате каких-либо более экзотических механизмов [202]) и что на малых масштабах пространственное распределение ПЧД должно соответствовать пуассоновскому. По этой причине, а также из предположения, что для таких больших значений красного смещения и столь малых масштабов космологические возмущения плотности должны быть невелики, мы задали начальные координаты частиц из пуассоновского распределения, а их начальные peculiar скорости положили равными нулю.

Моделирование с высоким разрешением имеет в 10 раз больше частиц $N_{total} = 10^6$. Поскольку $f_{PВH}$ варьируется, мы соответствующим образом корректируем размер куба, в котором считается соответствующая численная модель, чтобы достичь нужной плотности частиц. Следовательно, размер куба варьируется от $15.21 h^{-1}$ кпк для $f_{PВH} = 1.0$ до $706.04 h^{-1}$ кпк для $f_{PВH} = 10^{-4}$ ($1521.12 h^{-1}$ кпк для моделирования с высоким разрешением).

Чтобы уменьшить возможные артефакты, связанные с периодичностью граничных условий в столь относительно небольшом кубе, окончательное красное смещение моделирования было ограничено $z = 3$. Было записано 200 срезов по времени с интервалами красного смещения, равномерно распределенными в логарифмическом масштабе, начиная с $z = 10^5$ до $z = 3$.

Все модели имеют одни и те же космологические параметры в соответствии со значениями, полученными космической обсерваторией Planck [6], т.е., $\Omega_{\Lambda,0} = 0.692885$, $h = 0.6777$, $\sigma_8 = 0.8288$, $n_s = 0.9611$. Плотность материи

принята равной $\Omega_{m,0} = 0.307023$, а плотность излучения $\Omega_{r,0} = 0.000092$, где $\Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} = 0.307115$ и, соответственно, $\Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1.0$.

Сводка наиболее важных параметров моделирования приведена в таблице 5.

Таблица 5 — Параметры моделирования.

Фракция $f_{PВH}$	1.0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-4}
Размер куба (кпк/h)	15.21	32.77	152.11	327.71	706.04	1521.12
Число частиц N_{total}	10^4	10^4	10^5	10^5	10^5	10^6
Масса частицы (M_{\odot})	30	30	30	30	30	30
Параметр грав. сглаживания ϵ (пк)	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}
Мин. шаг по времени Δt_{min}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}
Начальное кр. смещение	10^5	10^5	10^5	10^5	10^5	10^5

3.4 Формирование и устойчивость пар ПЧД

В этом разделе мы оцениваем скорость образования пар ПЧД, а также вероятность разрушения пары из-за численных ошибок, а не из-за физических процессов.

Для анализа образования пар в нашем моделировании мы вычисляем полную энергию E системы двух тел для каждой частицы и ее ближайшего соседа (см. (3.2)). Мы считаем, что пара частиц гравитационно-связана друг с другом, если выполняется условие $E < 0$. Разумеется, в каждой из моделей существует определенное количество пар, которые гравитационно-связаны более чем с одним соседом. Как правило, такие частицы входят в состав устойчивой тройной (или кратной) системы. Это количество варьируется от 1% до 20% от общего количества пар, в зависимости от красного смещения и доли ПЧД. В контексте метода, который мы используем для оценки скорости слияния (см. Раздел 3.2), а также для простоты, мы по-прежнему рассматриваем такие пары как *двойные* системы, и учитываем только соседа с минимальным значением полной энергии

(который не обязательно должен быть ближайшим соседом). Соответственно, мы не учитываем *неустойчивые тройные* системы, где компоненты не связаны друг с другом попарно.

Как мы упоминали в разделе 3.2, помимо классических ньютоновских парных захватов мы также рассматриваем возможность, при которой энергия, излучаемая в виде ГВ во время близких гиперболических пролетов, может быть достаточной для связывания данной пары, т.е. $E - T|\dot{E}| < 0$. Мы выяснили, что, хотя такие события возможны, они крайне редки либо вообще отсутствуют (для моделирования с $f_{PВH} < 0.1$). Мы сравнили количество таких событий, $n_{cap(GR)}$ (т.е. захват, связанный с эффектами ОТО с количеством чисто ньютоновских захватов, $n_{cap(Nt)}$. В Таблице 6 мы приводим соотношение этих двух чисел как функцию доли ПЧД в различных симуляциях.

Таблица 6 — Отношение количества захватов, связанных с эффектами ОТО ($n_{cap(GR)}$) к общему количеству чисто ньютоновских захватов ($n_{cap(Nt)}$) для численных моделей с различной долей ПЧД ($f_{PВH}$).

1.0	0.00011
10^{-1}	0.00042
10^{-2}	0.
10^{-3}	0.
10^{-4}	0.
$10^{-4}(N_{total} = 10^6)$	0.

Поэтому мы убеждены, что, по крайней мере, для нашего набора симуляций, детальный учет поправок, связанных с эффектами ОТО, к координатам и скоростям, вероятно, не нужен. Однако, как мы уже упоминали, этот эффект присутствует только в моделировании с более высокими значениями $f_{PВH}$. Но в то же время эти две симуляции в нашем наборе имеют наименьшее количество частиц ($N = 10000$). Иначе говоря, эффект слишком редок для небольших численных моделей, чтобы как-то существенно влиять на их результаты. Поэтому, если бы в будущем мы рассматривали более крупную численную модель с аналогичными значениями $f_{PВH}$ (например, $N = 10^6$), то изучить этот эффект более подробно определенно имело бы смысл.

После этого мы оцениваем скорость образования классических связанных пар и скорости разрушения пар в зависимости от красного смещения z (см. Рисунок 3.2 для $f_{PВH} = 1.0$).

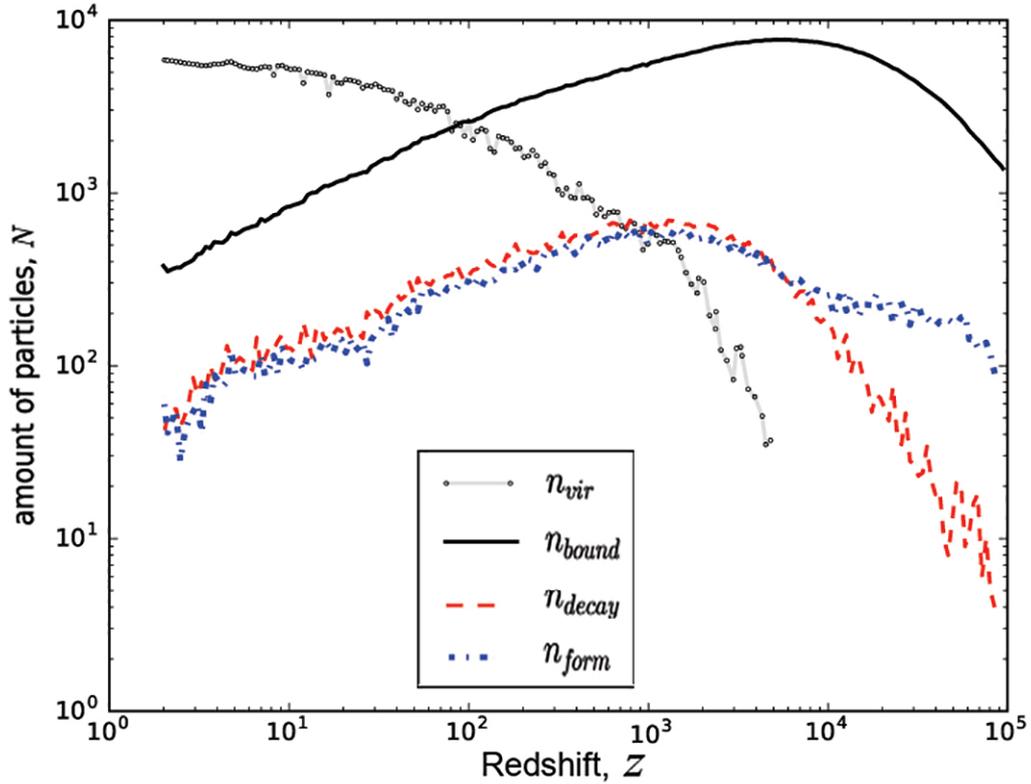


Рисунок 3.2 — Количество частиц ПЧД n как функция красного смещения z для фракции ПЧД $f_{PBH} = 1.0$, где n представляет различные подмножества частиц ПЧД (см. Легенду): n_{bound} - общее количество гравитационно-связанных частиц в моделировании; n_{form} - количество частиц, которые в данный момент (т.е. между двумя срезами по времени) образуют пару; n_{decay} - частицы в паре, распадающиеся на данном красном смещении z . А n_{vir} представляют частицы, которые в настоящее время являются частью вириализованной структуры (см. Раздел 3.4.3). Совместный результат диссертанта из работы **A3**: [3]

Как видно из этого рисунка, скорости образования и разрушения пар быстро растут до эпохи равновесия излучения и вещества, а затем, вскоре после этого, начинают спадать из-за процесса вириализации вещества (который мы обсудим в разделе 3.4.3).

Прежде чем двигаться дальше, мы должны убедиться, что такое поведение не вызвано артефактами численного расчета. Поэтому в дальнейшем мы исследуем проблему устойчивости пар в зависимости от длины сглаживания, шага интегрирования по времени, а также в случае многочастичных взаимодействий, включая образование вириализованных кластеров.

3.4.1 Длина Сглаживания

В большинстве современных *n-body* кодов гравитационный потенциал *сглажен*, чтобы избежать сингулярности при малых расстояниях между частицами, что может привести к временным шагам, близким к нулю, и неоправданно долгому времени вычислений. В GADGET-2 функция распределения плотности одной частицы $\tilde{\delta}$ представляет собой δ -функцию Дирака, свёрнутую с ядром нормализованного гравитационного сглаживания сопутствующего масштаба ϵ . В GADGET-2 используется сплайн-ядро [203], часто применяемое в SPH⁶ методах, и равно $\tilde{\delta} = W(|x|, 2.8\epsilon)$, где $W(r)$ определяется выражением

$$W(r, h) = \frac{8}{\pi h^3} \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{r}{h}\right)^2 + 6\left(\frac{r}{h}\right)^3, & 0 \leq \frac{r}{h} \leq \frac{1}{2}, \\ 2\left(1 - \frac{r}{h}\right)^3, & \frac{1}{2} \leq \frac{r}{h} \leq 1, \\ 0, & \frac{r}{h} > 1 \end{cases} \quad (3.7)$$

(см. [88])

В контексте нашего моделирования это означает, что если две гравитационно-связанные частицы имеют очень маленькое расстояние до перицентра $p = a(1 - e)$, то они могут быть *"искусственно"* разрушены из-за того, что гравитационный потенциал вычисляется как $-Gm/\epsilon$ на таких расстояниях, как подразумевается в 3.7. Это может привести к значительным численным ошиб-

⁶англ. *Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)* — Гидродинамика Сглаженных Частиц

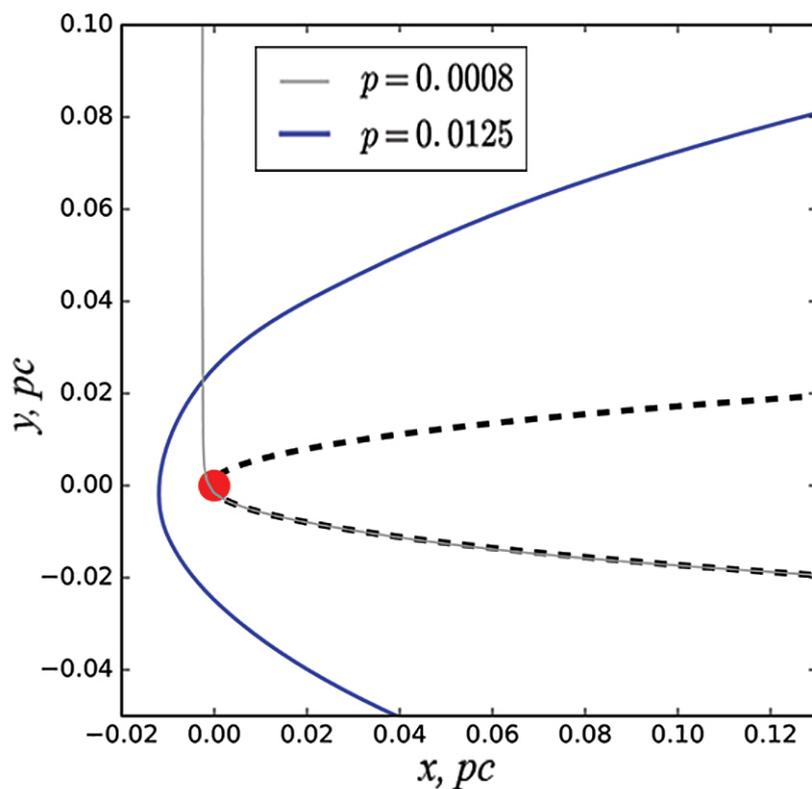


Рисунок 3.3 — Траектории частиц с различными расстояниями до перицентра.

Синяя сплошная линия соответствует моделируемой орбите с перицентром $p = 0,0125$ pc, а *светло-серая линия* соответствует $p = 0,0008$ пк; *пунктирная черная линия* представляет теоретическую траекторию для частицы с $p = 0,0008$ pc. Красный сплошной круг соответствует длине сглаживания $\epsilon = 0,001$. Совместный результат диссертанта из работы **A3**: [3].

кам в расчетах скоростей частиц. Этот эффект показан на Рисунке 3.3 для орбиты пары с $p = 0,0008$ рс, где гравитационное сглаживание $\epsilon = 0,001$ пк (то есть такое же, как в нашей основной группе численных моделей). С другой стороны, пара с орбитой $p = 0,0125$ пк не разрушается.

Чтобы убедиться, что наш выбор длины сглаживания $\epsilon = 0,001$ пк является оптимальным, мы сравниваем два моделирования с разными длинами сглаживания $\epsilon_1 = 0,001$ пк и $\epsilon_2 = 0,02$ пк, при этом мы сохраняем долю ПЧД $f_{РВН} = 1.0$ и другие начальные параметры как в основной группе численных моделей. Для обеих моделей мы выбираем пары, которые разрушаются во время *текущего* среза по времени, и оцениваем среднюю аномалию⁷ на *предыдущем* срезе по времени для этих пар. Это позволяет нам отслеживать момент прохождения перицентра для каждой пары. Если мы замечаем на *предыдущем* срезе по времени, что пара собирается пройти перицентр, но на *текущем* она разрушается, и, дополнительно, если расстояние перицентра для этой пары меньше длины сглаживания ($p < 2.8\epsilon$), то мы приходим к выводу, что разрушение было вызвано *численными эффектами*, связанными с расчетом гравитационного потенциала на масштабах меньше длины сглаживания.

На Рисунке 3.4 мы отображаем соответствующее количество пар, разрушенных из-за численных эффектов, связанных с расчетом *сглаженного* гравитационного потенциала, и полное количество разрушенных пар за каждый срез по времени для каждой симуляции. Как видно, количество пар, разрушенных из-за численных эффектов (или "*искусственно*", как мы отметили выше) относительно мало по сравнению с общим количеством разрушенных пар. В случае моделирования с меньшей длиной сглаживания $\epsilon_1 = 0,001$ пк количество "*искусственно*" разрушенных пар примерно на 20% меньше, чем в случае моделирования с $\epsilon_2 = 0,02$ рс. Однако стоит отметить, что это улучшение достигается за счет увеличения времени счета примерно в 10-15 раз. Таким образом, мы можем заключить, что наш выбор длины гравитационного размягчения является разумным и что дальнейшее сокращение, вероятно, не требуется.

⁷т.е. доля периода эллиптической орбиты, прошедшая с момента прохождения орбитальным телом своего перицентра

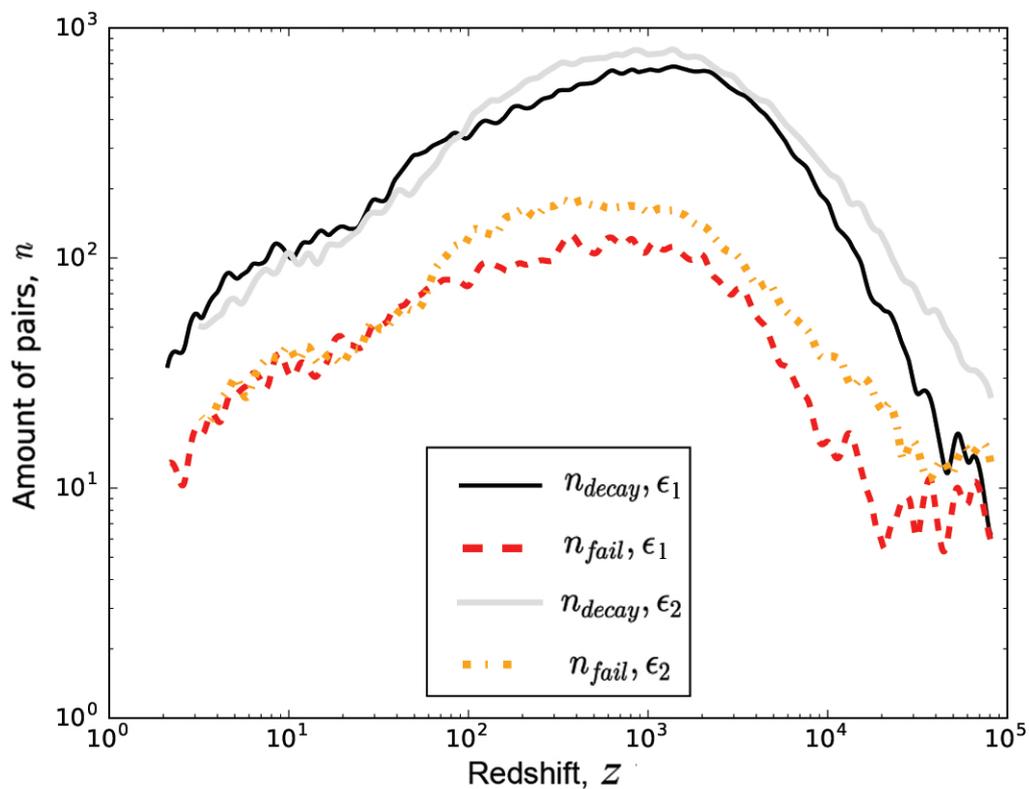


Рисунок 3.4 — *Пунктирные линии*: количество пар, разрушенных из-за эффектов гравитационного сглаживания в обоих моделированиях (доля ПЧД $f_{РВН} = 1.0$), *Сплошные линии*: общее количество пар, разрушенных на момент каждого среза по времени в обоих моделированиях. Где $\epsilon_1 = 0,001$ пк и $\epsilon_2 = 0,02$ пк - длины сглаживания в каждой из численных моделей соответственно (см. обозначения). Совместный результат диссертанта из работы **А3**: [3].

3.4.2 Численные ошибки схемы интегрирования

В GADGET-2 используется схема интегрирования по времени *"leapfrog"*, которая по сравнению с обычными методами численного интегрирования, такими как метод Рунге-Кутты высоких порядков, обеспечивает гораздо лучшее сохранение орбитальной энергии и более стабильную орбиту в целом. Однако, в зависимости от шага по времени, ошибки интегрирования могут быть значительными для конкретной задачи, поэтому мы выполняем тестовый набор *"идеальных"* симуляций двух тел, используя код GADGET-2. Начальные параметры этих симуляций почти в точности такие же, как и для нашего основного набора симуляций, за исключением того, что мы провели дополнительное моделирование с меньшим временным шагом $\Delta t = 10^{-7}$ (по сравнению с $\Delta t = 10^{-6}$, которое используется в нашем основном наборе). Мы также отключили периодичность граничных условий куба и Хаббловское расширение, переключившись с сопутствующих координат на физические. Ровно две частицы помещаются в пустой куб с начальными условиями для координат и скоростей, соответствующими эксцентриситету пары $e = 0,9877$ и орбитальному периоду $T = 0,0123$ млрд. лет. Мы провели моделирование за общее время $t \approx 1000 \times T = 12,5$ млрд лет. Как видно из Рисунка 3.5, для случая с меньшим временным шагом $\Delta t = 10^{-7}$ (сплошная черная линия) орбита остается на удивление стабильной в течение всего моделирования. Однако для некоторых симуляций в нашем основном наборе (в зависимости от доли РВН $f_{РВН}$ и общего количества частиц N_{total}) такое маленькое значение временного шага может привести к неоправданно длительному времени вычислений. Чтобы уменьшить влияние численных ошибок при более высоких значениях временного шага, мы включаем параметр компиляции PSEUDOSYMMETRIC в GADGET-2. Когда этот параметр установлен, код будет пытаться «предвидеть» изменения временного шага, экстраполируя изменение ускорения в будущее. В некоторых идеализированных случаях (как, например, в нашем) это может улучшить качество интегрирования периодических орбит в долговременной перспективе [88]. Как видно из Рисунка 3.5, при включенной опции PSEUDOSYMMETRIC орбитальные параметры пары уменьшаются намного медленнее по сравнению со случаем, когда эта опция отключена. Менее чем за 300 периодов значение большой полуоси для моделирования без флага

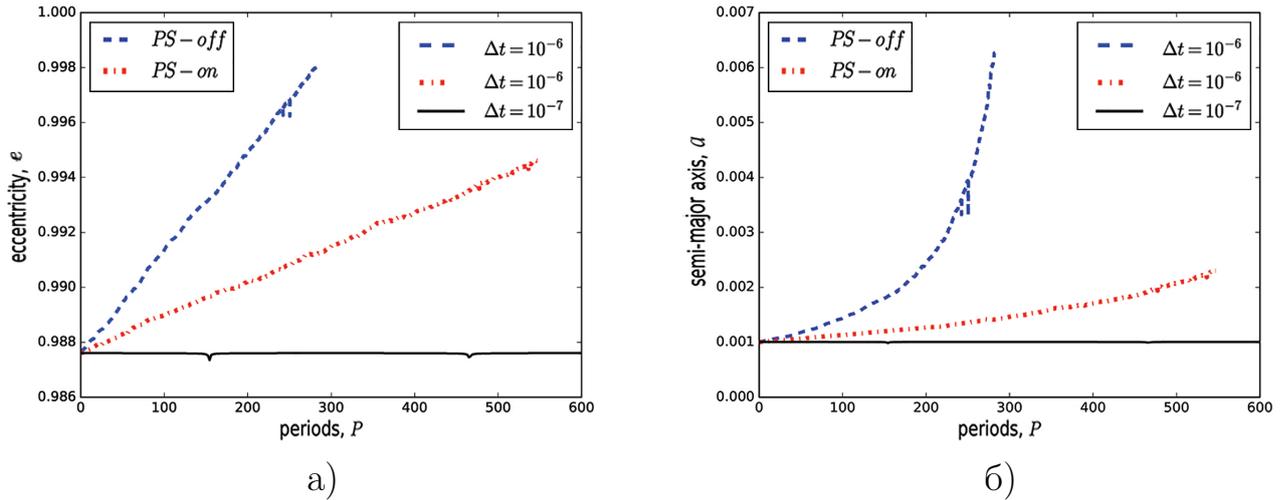


Рисунок 3.5 — Анализ изменения орбиты системы двух тел из-за ошибок численного интегрирования по времени в **GADGET-2**. Эксцентриситет пары e (левая панель) и большая полуось a (правая панель) как функция времени в единицах периодов обращения. Синяя пунктирная линия соответствует моделированию с включенным параметром **PSEUDOSYMMETRIC** и временным шагом $\Delta t = 10^{-6}$, красная пунктирная линия представляет моделирование с выключенным параметром **PSEUDOSYMMETRIC** и временным шагом $\Delta t = 10^{-6}$. Сплошная черная линия представляет моделирование с временным шагом $\Delta t = 10^{-7}$, на результаты которого параметр компиляции **PSEUDOSYMMETRIC** не влияет. Совместный результат диссертанта из работы **A3**: [3].

PSEUDOSYMMETRIC увеличивается более чем на $\sim 500\%$, по сравнению только с $\sim 40\%$ для случая с включенным параметром **PSEUDOSYMMETRIC**. Однако в основном наборе моделирования менее 5 пар на срез по времени выживали в течение 100 периодов до их последующего разрушения, в то время как абсолютное большинство пар имеет тенденцию разрушаться менее чем через 1 период (см. Рисунок 3.6). Таким образом, мы приходим к выводу, что разрушение происходит по другим причинам и в основном не из-за численных ошибок.

3.4.3 Вириализация Материи

Согласно большинству моделей ПЧД пар, механизм, ответственный за разрушение пары, — это приливное разрушение ближайшими соседями (например,

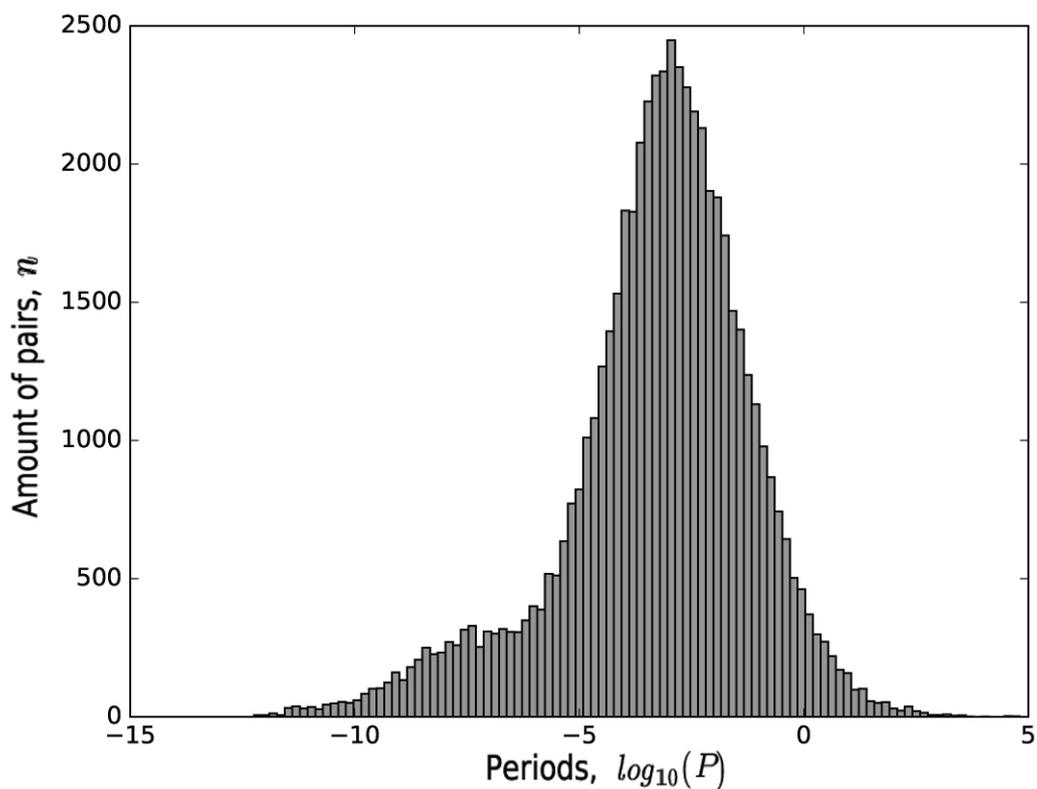


Рисунок 3.6 — Распределение событий разрушения пары на протяжении всей симуляции как функция ($f_{PВН} = 1.0$) от $\log_{10}(P)$, где P - количество орбитальных периодов, прошедших до того, как пара будет разрушена. То есть «0» соответствует одному полному периоду. Совместный результат диссертанта из работы **А3**: [3].

см. [188; 191]). В нашей невозмущенной Λ CDM модели с пуассоновскими начальными условиями вириализованные структуры, содержащие много частиц, начинают появляться на красных смещениях $z \approx 10^3$. С другой стороны, в классических WIMP моделях ТМ вириализованные структуры начинают формироваться намного позже, при $z < 100$ [204], и в целом стоит отметить, что гало из нормальной темной материи будет значительно отличаться от гало, состоящего из ПЧД темной материи. В этой работе мы *не* изучаем поведение пар ПЧД в гало, состоящих из *обычной* ТМ, как было упомянуто выше (см. Раздел 3.3). По мере роста плотности внутри новообразованного гало ТМ расстояние между частицами уменьшается и, естественно, уменьшается и расстояние до ближайшего соседа.

Как показано на Рисунке 3.2, скорость образования и распада пар начинает замедляться при $z \approx 10^3$, в то время как скорость дестабилизации орбиты быстро увеличивается. Чтобы идентифицировать вириализованные структуры, образованные частицами ПЧД, мы проанализировали наши симуляции с помощью общедоступного инструмента поиска гало АНФ⁸ [104], с учетом минимального допустимого количества частиц ПЧД в гало $N_{min} = 10$ и параметра плотности $D_{vir} = 200$ (т.е. плотность гало как минимум в 200 раз выше средней плотности Вселенной на данном красном смещении).

На Рисунке 3.2, *серые соединенные точки* представляют количество частиц, которые в настоящее время являются частью гало, состоящего из ПЧД ТМ. Отслеживание индексов частиц с помощью инструментов АНФ позволяет нам классифицировать все гравитационно-связанные частицы n_{bound} на два подмножества: частицы, которые связаны внутри некоторого ПЧД гало n_{halo} , и частицы, которые гравитационно связаны друг с другом, но не принадлежат какому-либо гало, n_{free} . Очевидно, $n_{halo} + n_{free} = n_{bound}$. Поскольку нам известны индексы всех гравитационно-связанных частиц, а также индексы частиц из разрушенных пар, теперь мы можем получить вероятности разрушения пары внутри ПЧД гало $P_{halo}(i)$, вне гало $P_{free}(i)$, и полную вероятность $P_{decay}(i)$ разрушения пары на заданном срезе по времени i :

$$P_{halo}(i) = \frac{n_{halo}(i)}{n_{halo}(i-1)}, \quad (3.8)$$

⁸<http://popia.ft.uam.es/AHF/>

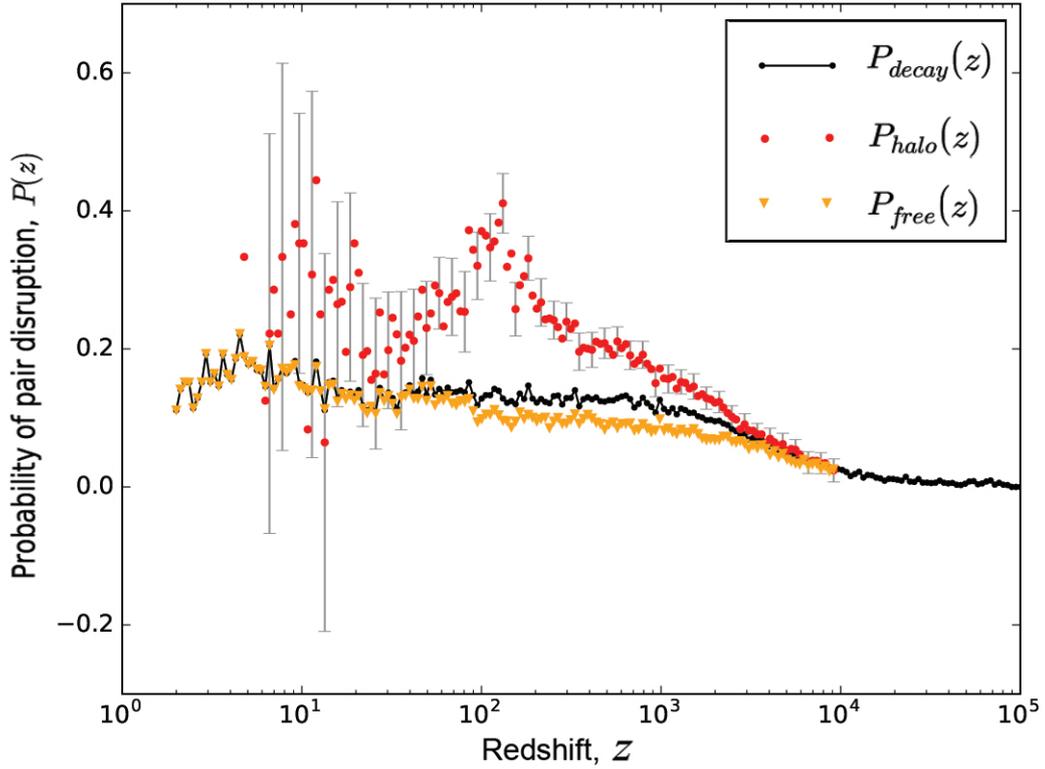


Рисунок 3.7 — Вероятности разрушения пары: внутри гало ПЧД P_{halo} (красные точки), вне гало P_{free} (оранжевые треугольники) и полная вероятность разрушения пары на каждом срезе по времени P_{decay} (черная сплошная линия) как функция красного смещения z . Эти результаты соответствуют моделированию с $f_{РВН} = 1.0$. Совместный результат диссертанта из работы **А3**: [3].

$$P_{free}(i) = \frac{m_{free}(i)}{n_{free}(i-1)}, \quad (3.9)$$

$$P_{decay}(i) = \frac{n_{decay}(i)}{n_{bound}(i-1)}, \quad (3.10)$$

где $m_{halo}(i)$ и $m_{free}(i)$ представляют количество разрушающихся пар внутри и вне ПЧД гало соответственно на i -м снимке, $m_{halo}(i) + m_{free}(i) = n_{decay}(i)$, а $n_{halo}(i-1) + n_{free}(i-1) = n_{bound}(i-1)$ представляют количество связанных частиц в $(i-1)$ -м снимке.

Как видно из Рисунка 3.7, вероятность разрушения пары внутри гало ПЧД значительно выше, чем вне гало, сразу как только "первые" вириализованные структуры начинают появляться между красными смещениями. $z = 10^4$ и $z = 10^3$, что соответствует равновесию излучения и вещества или даже на бо-

лее ранних эпохах. Более высокие значения ошибок на более низких красных смещениях ($z < 10$) связаны с чрезвычайно малым количеством пар, все еще остающихся в гало.

"Первые" гравитационно-связанные структуры, которые мы можем найти с помощью АНФ, являются небольшими кластерами размером в ~ 10 частиц (это значение, которое мы использовали в АНФ для определить минимальное количество частиц в гало $N_{min} = 10$). Такие миниатюрные конструкции сложно назвать гало в традиционном понимании. В случае нашего набора моделирования "классические" гало со множеством частиц могут быть обнаружены только при моделировании с большей фракцией ПЧД, например, $f_{PВН} = 1.0$ и $f_{PВН} = 0.1$. При этом, однако, небольшие гравитационно-связанные структуры размером от 3 до 10 частиц действительно существуют в каждой из наших $5 + 1$ численных моделей. Обнаружение таких гравитационно-связанных структур на больших красных смещениях при моделировании с низкими значениями фракции ПЧД в ТМ с использованием традиционных методов представляет собой серьезную проблему. Судя по всему, это происходит из-за концептуальных ограничений космологических методов поиска гало, основанных на алгоритмах граничных максимумов плотности ("*Bound Density Maxima*"), которые требуют измеримого уровня контраста плотности для *надежного* обнаружения гало, в то время как при более ранних красных смещениях контраст плотности, вызванный такими небольшими кластерами, практически отсутствует. Попытка использовать средства поиска гало на основе алгоритма минимального покрывающего дерева или FOF⁹ (см. [205]) также не дает значимых результатов, так как для нашего случая пороговое расстояние не может быть выбрано однозначно, поскольку вариации расстояния между частицами как в поле, так и внутри кластеров велики. То есть результат будет зависеть от выбора порогового расстояния.

Мы пришли к выводу, что доля вириализованного вещества на самом деле выше при большом красном смещении, $z \geq 10^3$, чем показано на нашем Рисунке 3.2, поэтому мы не можем достоверно оценить какое влияние скопления ПЧД оказывают на разрушение пар в это время. В более же поздние времена, $z \sim 10^2$, когда вириализованная материя ПЧД конденсируется в большие гало, наши оценки воздействия вириализации должны быть правильными.

⁹англ. *Friends-Of-Friends*

3.5 $f_{PВН} < 1.0$: Слияния пар ПЧД

В предыдущем разделе мы пришли к выводу, что численные ошибки, по-видимому, не играют какой-либо существенной роли в процессе образования и разрушения пар. Вместо этого, похоже, что наиболее важным фактором в этом процессе является вириализация вещества, которая начинается при $z \approx 3000$. Этот качественный результат, по-видимому, хорошо согласуется с оценками, недавно полученными в работах [206] и [207]. Теперь мы можем перейти к нашей основной цели: оценить скорость слияния пар ПЧД из наших симуляций с различной долей темной материи в виде ПЧД. Количество гравитационно-связанных частиц для каждой симуляции показано на Рисунке 3.8. Интересно, что количество пар примерно пропорционально $f_{PВН}$, что совпадает с результатами, полученными в работе [208]. Для каждого *текущего* среза по времени мы ищем ПЧД пары, которые были сформированы на *предыдущем* срезе по времени и просуществовали до *текущего* среза по времени (см. Раздел 3.4). Мы считаем такую пару *новообразованной* парой. Затем мы вычисляем среднюю аномалию пары и наблюдаем ее постепенное изменение на каждом снимке, во время которого пара остается гравитационно-связанной. Если частицы проходят перицентр, мы вычисляем левый и правый члены условия слияния (см. Уравнение 3.3) на данном срезе по времени. Если пара разрушается после прохождения перицентра (см. Раздел 3.4.1), мы вычисляем эти два члена условия слияния, используя параметры орбиты из предыдущего среза по времени. Таким образом, мы не упускаем из виду те пары, которые были «несправедливо» разорваны, когда их частицы приблизились друг к другу на расстояние, меньшее, чем длина сглаживания. Когда это условие выполняется, мы помечаем пару как *слившуюся*. Также стоит отметить, что для ПЧД с массами $M = 30M_{\odot}$ максимальный перицентр для объединяющейся пары составляет 2.6×10^{-4} пк, что можно рассчитать, принимая время объединения для пары меньше ~ 10 млрд. лет. На практике, однако, после слияния частицы все еще остаются там, где они есть, и пара фактически не заменяется вдвое более тяжелой частицей. Поскольку количество пар должно уменьшаться после слияния, во избежание избытка действующих частиц при моделировании мы искусственно «удаляем» одну из частиц из объединенной пары (то есть просто перестаем ее учитывать при ана-

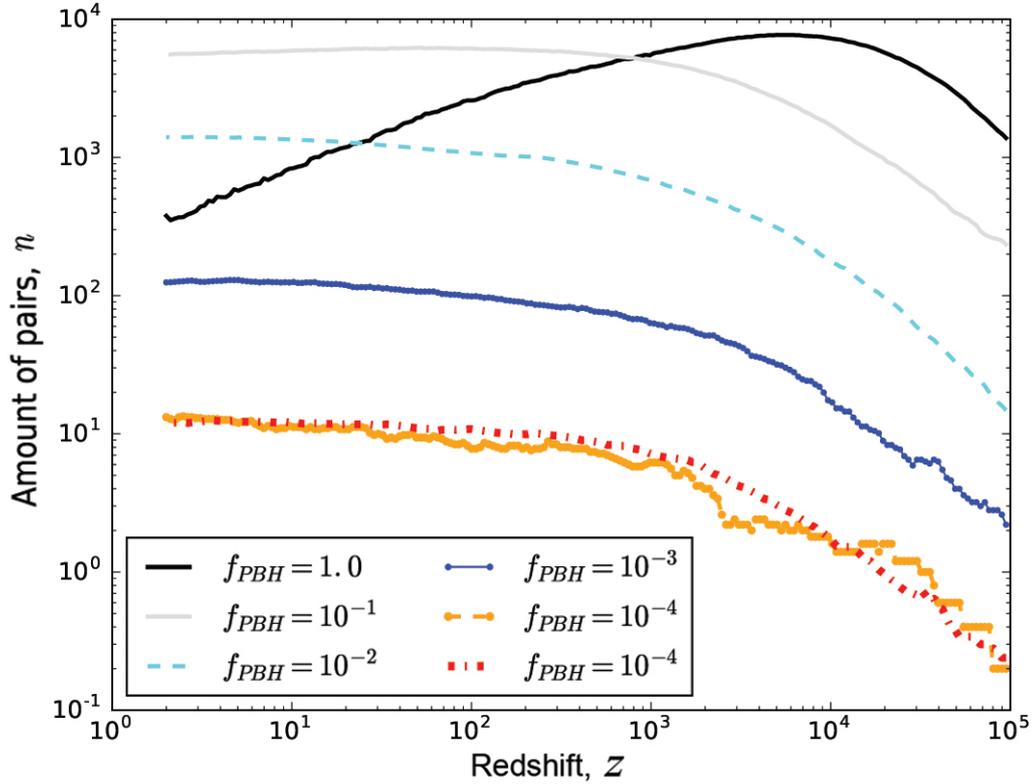


Рисунок 3.8 — Количество *гравитационно-связанных* пар ПЧД на протяжении моделирования как функция красного смещения z . Общее количество частиц зафиксировано на $N = 10^4$. Моделирование с $N > 10^4$ масштабируется до этого значения. Различные линии соответствуют моделированиям с различными долями темной материи в форме ПЧД, варьирующимися от $f_{PBH} = 1.0$ до $f_{PBH} = 10^{-4}$ (см. легенду для конкретных символов). *Оранжевая пунктирная линия* представляет моделирование с $f_{PBH} = 10^{-4}$ и общим количеством частиц $N = 10^5$, а *красная пунктирная линия* представляет моделирование с той же долей ПЧД, но для $N = 10^6$.

Совместный результат диссертанта из работы **А3**: [3].

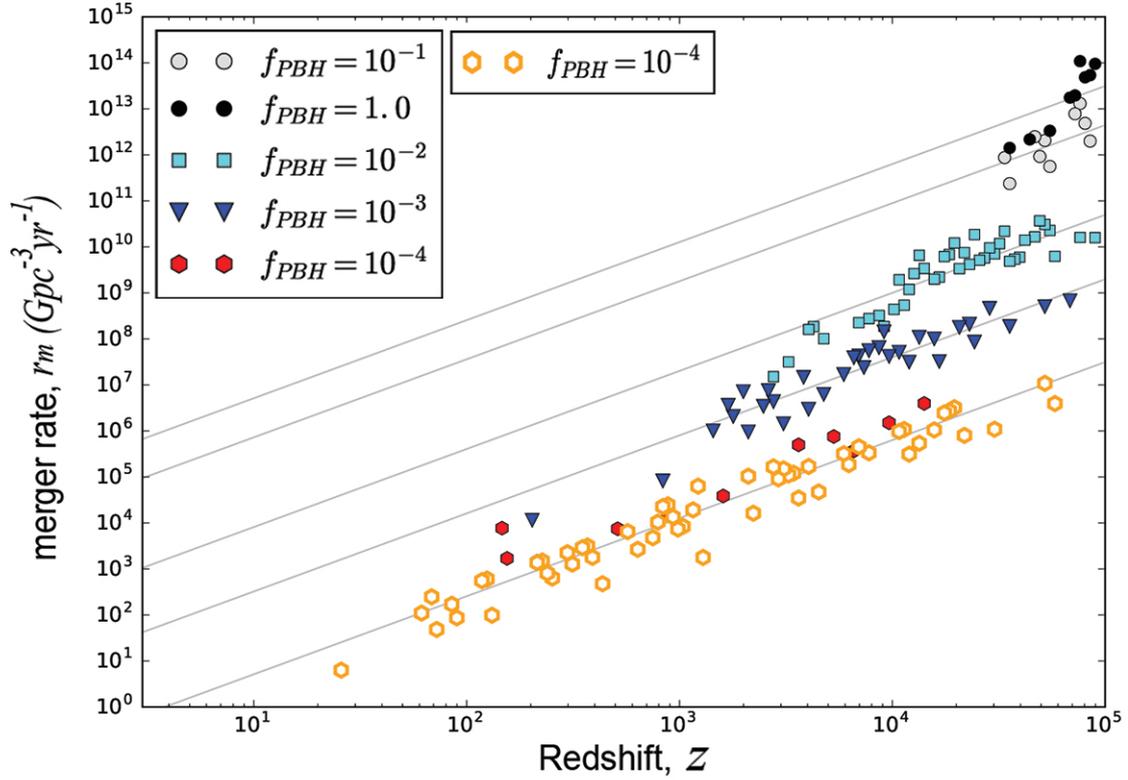


Рисунок 3.9 — Скорость слияния пар ПЧД, r_m , как функция красного смещения z (см. легенду для конкретных символов). Шестиугольники с красной заливкой представляют результаты моделирования с частицами $f_{PBH} = 10^{-4}$ и $N = 10^5$, а белые шестиугольники с оранжевой границей представляют моделирование высокого разрешения с $f_{PBH} = 10^{-4}$ и $N = 10^6$ частицами. Экстраполированные значения в соответствующие точки для разных фракций ПЧД представлены светло-серыми прямыми линиями.

Совместный результат диссертанта из работы **A3**: [3].

лизе). Таким образом, когда такая пара разрушается, только одна из частиц теперь считается «свободной», а другая игнорируется для остальной части моделирования. Мы также проверили, что наши результаты по скорости слияния существенно не изменятся, если мы сохраним обе частицы объединенной пары или если мы удалим их обе. На Рисунке 3.9 мы показываем соответствующие темпы слияния, r_m для каждой из наших моделей, перечисленных в Таблице 5. Как видно на этом рисунке, мы не можем обнаружить события слияния меньше определенного красного смещения для всех пяти симуляций. Поэтому мы решили провести дополнительное моделирование (описанное в разделе 3.3) с увеличенным числом частиц ПЧД $N = 10^6$, чтобы проверить, как число ча-

стиц улучшит эту ситуацию. *Белые шестиугольники с оранжевой границей* на Рисунке 3.9 представляют собой моделирование с высоким разрешением, в котором в 10 раз больше частиц (по сравнению с моделированием из основной группы с $f_{PВН} = 10^{-4}$ и $N = 10^5$ частицами). Можно наблюдать значительно больше событий слияния, в то время как скорость слияния на Гпк³ в год для фракции ПЧД остается примерно такой же. Кроме того, как мы упоминали в Разделе 3.2, мы также рассматривали слияния, вызванные излучением ГВ при близких гиперболических пролетах, и оказалось, что только 0,77% всех слияний во всех наших 6 моделированиях имели гиперболические орбиты, и только моделирование с более высокой долей ПЧД (1,0 и 0,1) показало измеримое количество таких слияний (см. Таблицу 6).

Чтобы зарегистрировать события слияния при $z = 3$ для фракции ПЧД $f_{PВН} = 10^{-3}$, нам нужно увеличить количество частиц в моделировании с $N = 10^5$ до приблизительно $N = 10^8$, что увеличит время вычислений на порядок от 100 до 1000 и приведет к моделированию сложностью $> 10^6 - 10^7$ процессорных часов. В качестве альтернативы мы можем просто экстраполировать наш результат на заданное красное смещение. Результаты этой экстраполяции показаны на Рисунке 3.9 в виде *светло-серых прямых линий*. В случае с $f_{PВН} = 10^{-3}$, скорость слияния примерно соответствует $r_m \approx 10^2$ Гпк⁻³.год⁻¹ при красном смещении $z \approx 3$. Однако, несмотря на то, что результат для этой фракции ПЧД совпадает с оценкой скорости слияния, сделанной коллаборацией LIGO [176] и другими группами [188; 191; 207], такая экстраполяция может не подходить для оценки темпов слияния фракций ПЧД $f_{PВН} > 0,001$, и здесь она представлена как качественный результат. Как мы обсуждали в Разделе 3.4.3, образование больших гравитационно-связанных структур (таких как гало ТМ) может предотвратить события слияния в целом, в то время как, с другой стороны, выбор более реалистичной модели (например, такой, которая правильно учитывает эффекты ОТО в плотных скоплениях, как обсуждалось в недавней статье [192]), может еще больше усложнить ситуацию.

3.6 Выводы

Основная цель этой работы - расширить наши представления о процессе образования, разрушения и слияния связанных и несвязанных пар Первичных Черных Дыр (ПЧД) в качестве одного из возможных кандидатов, ответственных за события, зарегистрированные Гравитационно-Волновой Обсерваторией LIGO, такие как [30; 175–180].

Была проведена серия космологических симуляций в кубе с периодическими граничными условиями, где либо вся темная материя, либо переменная доля $f_{PВН}$ представлена первичными черными дырами (ПЧД) с массами $30 M_{\odot}$. Предполагается, что «нормальная» темная материя представляет собой однородную жидкость без флуктуаций плотности, которая участвует только в оценке функции Хаббла. Было показано, что это предположение разумно для $z \geq 10$. Однако значение красного смещения в моделировании было снижено до $z = 3$ для избежания ошибок, связанных с периодичностью граничных условий модели.

Для того, чтобы учесть стадию расширения Вселенной с преобладанием радиации, используется модифицированная версия общедоступного кода для расчета задачи N тел GADGET-2 [88] с определенными параметрами, настроенными для расчета орбитальных параметров формирующихся пар ПЧД с достаточной точностью, чтобы точно отслеживать их орбиты, пока они не сольются или не будут разрушены из-за взаимодействия со своими соседями. Вдобавок, был сделан вывод, что количество захватов двойных во время близких гиперболических пролетов из-за эффектов ОТО ничтожно мало по сравнению с количеством чисто ньютоновских захватов.

Было показано, что зарегистрированное разрушение пары не вызвано внутренними численными ошибками, сопряженными с вычислениями орбит N тел. В результате было показано, что основным фактором, ответственным за процессы образования, разрушения и слияния пар ПЧД, является возникновение гравитационно-связанных структур при красных смещениях $z \approx 3000$, что примерно соответствует эпохе равномерного распределения излучения и вещества.

Также описываются результаты по скорости слияния пар ПЧД, включая гиперболические слияния, которые составляют 0,77% от общего числа слияний

по всем 6 численным моделям. Путем сравнения темпов слияния моделей с той же долей ПЧД $f_{PBH} = 10^{-4}$ и различным количеством частиц, $N = 10^5$ и $N = 10^6$, было продемонстрировано, что размер выборки влияет на количество зарегистрированных слияний, но, в то же время, частота слияний остается примерно такой же. Затем частоты слияния для всех фракций ПЧД экстраполируются до красного смещения $z = 3$, и потом оценивается значение скорости слияния в $r_m \approx 10^2 \text{ Гпк}^{-3} \cdot \text{год}^{-1}$ для доли ПЧД, равной $f_{PBH} = 10^{-3}$, что довольно точно соответствует скорости слияния, оцененной коллаборацией LIGO [176] и другими группами [188; 191].

Однако, оценки скорости слияния приведенные в данной главе для больших значений фракций ПЧД ($f_{PBH} > 0,01$) могут быть существенно завышены, поскольку простая экстраполяция не учитывает влияние процессов, связанных с вириализацией вещества. С другой стороны, как было показано в работе [209]), процессы аккреции, существующие до красного смещения $z \sim 10$, также могут влиять на численность ПЧД. Как обсуждают авторы, скорость аккреции существенно зависит от относительной скорости между ПЧД и барионным веществом. Следовательно, вириализация может играть даже более важную роль в эволюции пар ПЧД, чем предполагалось в разд. 3.4.3. В этой главе обсуждаются качественные реализации этого явления, но, очевидно, требуется более тщательный количественный анализ.

Заключение

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию наблюдательных проявлений темной материи и получению количественных критериев их возникновения при помощи инструментов численного моделирования.

1. Путем проведения численных экспериментов образования гало темной материи было показано, что начальная энтропия для гало оказывается на порядок меньше, чем рассчитанная по линейной теории (например, см. [67]). Иными словами, касп в гало возникает из областей начального распределения материи, имеющих энтропию на порядок ниже, чем в среднем по Вселенной (внутри случайно выбранной сферы с массой каспа). Поэтому предположение о том, что симуляции высокого разрешения сами по себе способны решить проблему каспов, скорее всего не соответствует действительности.
2. Построена полуаналитическая модель ИК-фона неба, учитывающая данные космологического расчета крупномасштабной структуры Вселенной и эволюции гало темной материи, а также получены модельные карты ИКФ с учетом эффектов гравитационного линзирования, к которым можно применять различные алгоритмы поиска источников. Также было показано, что спектральный анализ этих карт отчетливо выделяет крупномасштабную структуру Вселенной, а двумерный спектр мощности оказался близок к измеренному космическими обсерваториями в ИК диапазоне. Данная модель может быть использована для определения предела путаницы для будущих космических телескопов дальнего ИК диапазона 10-метрового класса, а также для сравнения кластеризации пиков интенсивности фона с реальной крупномасштабной структурой.
3. С использованием серии космологических симуляций N-тел, которые включали как темную материю, так и переменную фракцию частиц ПЧД в диапазоне от $f_{PВН} = 10^{-4}$ до $f_{PВН} = 1$ были получены оценки темпов формирования, разрушения и слияния пар ПЧД, а также было показано, что эти оценки хорошо согласуются с ограничениями на

содержание ПЧД, полученными LIGO и другими исследовательскими группами. Стоит отметить, что для оценки темпов формирования, разрушения и слияния пар ПЧД инструменты космологического численного счета были задействованы впервые. Также впервые было показано, что основным фактором, ответственным за процессы формирования, разрушения и слияния пар ПЧД, является возникновение гравитационно-связанных структур при красных смещениях, примерно соответствующих эпохе равномерного распределения излучения и вещества. Было оценено влияние численных ошибок на стабильность связанных пар, что может быть полезно для будущих исследований с использованием этой методологии (Глава 3).

Публикации автора по теме диссертации

1. *М. В. Ткачев С. В. Пилипенко Э. К.* Моделирование гало темной материи. Проверка энтропийного подхода к проблеме каспов // *Астрономический Журнал*. — 2019. — май. — т. 63, № 5. — с. 372—377. — DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063772919050068>.
2. *С. В. Пилипенко; М. В. Ткачев; А. Ермаш Т. И. Л. Е. В. М. В. Н. Л.* Модель инфракрасного фона неба, созданного далекими галактиками // *Письма в Астрономический журнал*. — 2017. — окт. — т. 43, № 10. — с. 644—655. — DOI: [10.1134/s1063773717100073](https://doi.org/10.1134/s1063773717100073). — URL: <http://dx.doi.org/10.1134/S1063773717100073>.
3. *Tkachev M. V., Pilipenko S. V., Yepes G.* Dark matter simulations with primordial black holes in the early Universe // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2020. — окт. — т. 499, № 4. — с. 4854—4862. — DOI: [10.1093/mnras/staa3103](https://doi.org/10.1093/mnras/staa3103). — URL: <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/staa3103>.

Список литературы

4. SEVEN-YEAR WILKINSON MICROWAVE ANISOTROPY PROBE (WMAP) OBSERVATIONS: SKY MAPS, SYSTEMATIC ERRORS, AND BASIC RESULTS / N. Jarosik [и др.] // The Astrophysical Journal Supplement Series. — 2011. — янв. — т. 192, № 2. — с. 14. — DOI: [10.1088/0067-0049/192/2/14](https://doi.org/10.1088/0067-0049/192/2/14). — URL: <https://doi.org/10.1088/0067-0049/192/2/14>.
5. NINE-YEAR WILKINSON MICROWAVE ANISOTROPY PROBE (WMAP) OBSERVATIONS: FINAL MAPS AND RESULTS / C. L. Bennett [и др.] // The Astrophysical Journal Supplement Series. — 2013. — сент. — т. 208, № 2. — с. 20. — DOI: [10.1088/0067-0049/208/2/20](https://doi.org/10.1088/0067-0049/208/2/20). — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/0067-0049/208/2/20>.
6. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters / Planck Collaboration [и др.] // Astronomy & Astrophysics. — 2014. — нояб. — т. 571. — A16. — DOI: [10.1051/0004-6361/201321591](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201321591). — arXiv: [1303.5076](https://arxiv.org/abs/1303.5076) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/abs/1303.5076)].
7. Planck 2018 results / N. Aghanim [и др.] // Astronomy & Astrophysics. — 2020. — сент. — т. 641. — A6. — DOI: [10.1051/0004-6361/201833910](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833910). — URL: <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201833910>.
8. *Persic M., Salucci P.* The baryon content of the Universe // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 1992. — сент. — т. 258, № 1. — 14P—18P. — DOI: [10.1093/mnras/258.1.14p](https://doi.org/10.1093/mnras/258.1.14p). — URL: <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/258.1.14P>.
9. *Trimble V.* Existence and Nature of Dark Matter in the Universe // Annual Review of Astronomy and Astrophysics. — 1987. — т. 25, № 1. — с. 425—472. — DOI: [10.1146/annurev.aa.25.090187.002233](https://doi.org/10.1146/annurev.aa.25.090187.002233).
10. *Corbelli E., Salucci P.* The extended rotation curve and the dark matter halo of M33 // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2000. — янв. — т. 311, № 2. — с. 441—447. — DOI: [10.1046/j.1365-8711.2000.03075.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2000.03075.x). — URL: <http://dx.doi.org/10.1046/j.1365-8711.2000.03075.x>.
11. *Faber S. M., Jackson R. E.* Velocity dispersions and mass-to-light ratios for elliptical galaxies. // The Astrophysical Journal. — 1976. — март. — т. 204. — с. 668—683. — DOI: [10.1086/154215](https://doi.org/10.1086/154215).

12. *Binney J., Merrifield M.* Galactic Astronomy. — 1998.
13. Gravitational Lens Magnification and the Mass of Abell 1689 / A. N. Taylor [и др.] // The Astrophysical Journal. — 1998. — июнь. — т. 501, № 2. — с. 539—553. — DOI: [10.1086/305827](https://doi.org/10.1086/305827). — URL: <https://doi.org/10.1086/305827>.
14. A comparison of different cluster mass estimates: consistency or discrepancy? / X.-P. Wu [и др.] // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 1998. — дек. — т. 301, № 3. — с. 861—871. — DOI: [10.1046/j.1365-8711.1998.02055.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.1998.02055.x). — URL: <http://dx.doi.org/10.1046/j.1365-8711.1998.02055.x>.
15. *Zaldarriaga M., Seljak U.* CMBFAST for Spatially Closed Universes // The Astrophysical Journal Supplement Series. — 2000. — авг. — т. 129, № 2. — с. 431—434. — DOI: [10.1086/313423](https://doi.org/10.1086/313423). — URL: <http://dx.doi.org/10.1086/313423>.
16. *Lesgourgues J.* The Cosmic Linear Anisotropy Solving System (CLASS) I: Overview. — 2011. — arXiv: [1104.2932](https://arxiv.org/abs/1104.2932) [[astro-ph.IM](https://arxiv.org/abs/1104.2932)].
17. Large Scale Structure in Bekenstein's Theory of Relativistic Modified Newtonian Dynamics / C. Skordis [и др.] // Physical Review Letters. — 2006. — янв. — т. 96, № 1. — DOI: [10.1103/physrevlett.96.011301](https://doi.org/10.1103/physrevlett.96.011301). — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.011301>.
18. Neutrino and axion hot dark matter bounds after WMAP-7 / S. Hannestad [и др.] // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. — 2010. — авг. — т. 2010, № 08. — с. 001—001. — DOI: [10.1088/1475-7516/2010/08/001](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2010/08/001). — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2010/08/001>.
19. *White S. D. M., Frenk C. S., Davis M.* Clustering in a neutrino-dominated universe // The Astrophysical Journal Letters. — 1983. — нояб. — т. 274. — с. L1—L5. — DOI: [10.1086/184139](https://doi.org/10.1086/184139).
20. *Jungman G., Kamionkowski M., Griest K.* Supersymmetric dark matter // Physics Reports. — 1996. — март. — т. 267. — с. 195—373. — DOI: [10.1016/0370-1573\(95\)00058-5](https://doi.org/10.1016/0370-1573(95)00058-5). — arXiv: [hep-ph/9506380](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9506380) [[hep-ph](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9506380)].

21. *Bertone G., Hooper D., Silk J.* Particle dark matter: evidence, candidates and constraints // *Physics Reports*. — 2005. — янв. — т. 405, № 5/6. — с. 279—390. — DOI: [10.1016/j.physrep.2004.08.031](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2004.08.031). — arXiv: [hep-ph/0404175](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0404175) [[hep-ph](https://arxiv.org/abs/hep-ph)].
22. *Bertone G.* The moment of truth for WIMP dark matter // *Nature*. — 2010. — нояб. — т. 468, № 7322. — с. 389—393. — DOI: [10.1038/nature09509](https://doi.org/10.1038/nature09509). — URL: <http://dx.doi.org/10.1038/nature09509>.
23. *Preskill J., Wise M. B., Wilczek F.* Cosmology of the invisible axion // *Physics Letters B*. — 1983. — янв. — т. 120, № 1—3. — с. 127—132. — DOI: [10.1016/0370-2693\(83\)90637-8](https://doi.org/10.1016/0370-2693(83)90637-8).
24. *Abbott L. F., Sikivie P.* A cosmological bound on the invisible axion // *Physics Letters B*. — 1983. — янв. — т. 120, № 1—3. — с. 133—136. — DOI: [10.1016/0370-2693\(83\)90638-X](https://doi.org/10.1016/0370-2693(83)90638-X).
25. *Dine M., Fischler W.* The not-so-harmless axion // *Physics Letters B*. — 1983. — янв. — т. 120, № 1—3. — с. 137—141. — DOI: [10.1016/0370-2693\(83\)90639-1](https://doi.org/10.1016/0370-2693(83)90639-1).
26. *Mannel T.* Theory and Phenomenology of CP Violation // *Nuclear Physics B Proceedings Supplements*. — 2007. — май. — т. 167. — с. 170—174. — DOI: [10.1016/j.nuclphysbps.2006.12.083](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysbps.2006.12.083).
27. Gravitational Waves from Coalescing Black Hole MACHO Binaries / Т. Nakamura [и др.] // *The Astrophysical Journal*. — 1997. — окт.
28. The MACHO Project: Microlensing Results from 5.7 Years of Large Magellanic Cloud Observations / С. Alcock [и др.] // *The Astrophysical Journal*. — 2000. — окт. — т. 542, № 1. — с. 281—307. — DOI: [10.1086/309512](https://doi.org/10.1086/309512). — URL: <http://dx.doi.org/10.1086/309512>.
29. Limits on the Macho content of the Galactic Halo from the EROS-2 Survey of the Magellanic Clouds / P. Tisserand [и др.] // *Astronomy and Astrophysics*. — 2007. — апр. — т. 469, № 2. — с. 387—404. — DOI: [10.1051/0004-6361:20066017](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20066017). — URL: <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361:20066017>.

30. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger / B. P. Abbott [и др.] // *Physical Review Letters*. — 2016. — февр. — т. 116, № 6. — с. 061102. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.116.061102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.061102). — arXiv: [1602.03837](https://arxiv.org/abs/1602.03837) [gr-qc].
31. Did LIGO Detect Dark Matter? / S. Bird [и др.] // *Physical Review Letters*. — 2016. — май. — т. 116, № 20. — DOI: [10.1103/physrevlett.116.201301](https://doi.org/10.1103/physrevlett.116.201301). — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.201301>.
32. *Clesse S., García-Bellido J.* The clustering of massive Primordial Black Holes as Dark Matter: Measuring their mass distribution with advanced LIGO // *Physics of the Dark Universe*. — 2017. — март. — т. 15. — с. 142–147. — DOI: [10.1016/j.dark.2016.10.002](https://doi.org/10.1016/j.dark.2016.10.002). — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.dark.2016.10.002>.
33. Primordial Black Hole Scenario for the Gravitational-Wave Event GW150914 / M. Sasaki [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2016. — авг. — т. 117, вып. 6. — с. 061101. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.117.061101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.061101). — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.117.061101>.
34. *Zel'dovich Y. B., Novikov I. D.* The Hypothesis of Cores Retarded during Expansion and the Hot Cosmological Model // *Astronomicheskii Zhurnal*. — 1966. — т. 43. — с. 758.
35. *Hawking S.* Gravitationally Collapsed Objects of Very Low Mass // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 1971. — апр. — т. 152, № 1. — с. 75–78. — DOI: [10.1093/mnras/152.1.75](https://doi.org/10.1093/mnras/152.1.75). — eprint: <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/152/1/75/9360899/mnras152-0075.pdf>. — URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/152.1.75>.
36. *Ivanov P., Naselsky P., Novikov I.* Inflation and primordial black holes as dark matter // *Phys. Rev. D*. — 1994. — дек. — т. 50, вып. 12. — с. 7173–7178. — DOI: [10.1103/PhysRevD.50.7173](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.50.7173). — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.50.7173>.
37. *Lacki B. C., Beacom J. F.* PRIMORDIAL BLACK HOLES AS DARK MATTER: ALMOST ALL OR ALMOST NOTHING // *The Astrophysical Journal*. — 2010. — авг. — т. 720, № 1. — с. L67–L71. — DOI: [10.1088/2041-8205/720/1/l67](https://doi.org/10.1088/2041-8205/720/1/l67). — URL: <https://doi.org/10.1088%5C%2F2041-8205%5C%2F720%5C%2F1%5C%2F167>.

38. Signatures of primordial black hole dark matter / К. М. Belotsky [и др.] // Modern Physics Letters A. — 2014. — дек. — т. 29, № 37. — с. 1440005. — DOI: [10.1142/S0217732314400057](https://doi.org/10.1142/S0217732314400057). — URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S0217732314400057>.
39. *Press W. H., Schechter P.* Formation of Galaxies and Clusters of Galaxies by Self-Similar Gravitational Condensation // Astrophysical Journal. — 1974. — февр. — т. 187. — с. 425—438. — DOI: [10.1086/152650](https://doi.org/10.1086/152650).
40. N-body simulations of galaxy clustering. II. Groups of galaxies. / E. L. Turner [и др.] // Astrophysical Journal. — 1979. — март. — т. 228. — с. 684—695. — DOI: [10.1086/156893](https://doi.org/10.1086/156893).
41. *Aarseth S. J., Gott J. R. I., Turner E. L.* N-body simulations of galaxy clustering. I. Initial conditions and galaxy collapse times. // Astrophysical Journal. — 1979. — март. — т. 228. — с. 664—683. — DOI: [10.1086/156892](https://doi.org/10.1086/156892).
42. *Klypin A. A., Shandarin S. F.* Three-dimensional numerical model of the formation of large-scale structure in the Universe. // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 1983. — сент. — т. 204. — с. 891—907. — DOI: [10.1093/mnras/204.3.891](https://doi.org/10.1093/mnras/204.3.891).
43. *Centrella J., Melott A. L.* Three-dimensional simulation of large-scale structure in the universe // Nature. — 1983. — сент. — т. 305. — с. 196—198. — DOI: [10.1038/305196a0](https://doi.org/10.1038/305196a0).
44. *Efstathiou G., Eastwood J. W.* On the clustering of particles in an expanding universe // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 1981. — февр. — т. 194. — с. 503—525. — DOI: [10.1093/mnras/194.3.503](https://doi.org/10.1093/mnras/194.3.503).
45. *Guth A. H.* Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems // Physical Review D. — 1981. — янв. — т. 23, № 2. — с. 347—356. — DOI: [10.1103/PhysRevD.23.347](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.23.347).
46. *Linde A. D.* A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems // Physics Letters B. — 1982. — февр. — т. 108, № 6. — с. 389—393. — DOI: [10.1016/0370-2693\(82\)91219-9](https://doi.org/10.1016/0370-2693(82)91219-9).

47. *Starobinskiĭ A. A.* Spectrum of relict gravitational radiation and the early state of the universe // Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters. — 1979. — дек. — т. 30. — с. 682.
48. *Starobinskiĭ A. A.* Spectrum of relict gravitational radiation and the early state of the universe // ZhETF Pisma Redaktsiiu. — 1979. — дек. — т. 30. — с. 719—723.
49. The Statistics of Peaks of Gaussian Random Fields / J. M. Bardeen [и др.] // Astrophysical Journal. — 1986. — май. — т. 304. — с. 15. — DOI: [10.1086/164143](https://doi.org/10.1086/164143).
50. *Zel'dovich Y. B.* Fragmentation of a homogeneous medium under the action of gravitation // Astrophysics. — 1970. — апр. — т. 6. — с. 164—174. — DOI: [10.1007/BF01007263](https://doi.org/10.1007/BF01007263). — URL: <https://doi.org/10.1007/BF01007263>.
51. A survey of galaxy redshifts. II. The large scale space distribution. / M. Davis [и др.] // Astrophysical Journal. — 1982. — дек. — т. 253. — с. 423—445. — DOI: [10.1086/159646](https://doi.org/10.1086/159646).
52. *Bertone G., Hooper D., Silk J.* Particle dark matter: evidence, candidates and constraints // Physics Reports. — 2005. — янв. — т. 405, № 5/6. — с. 279—390. — DOI: [10.1016/j.physrep.2004.08.031](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2004.08.031). — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2004.08.031>.
53. The evolution of large-scale structure in a universe dominated by cold dark matter / M. Davis [и др.] // Astrophysical Journal. — 1985. — май. — т. 292. — с. 371—394. — DOI: [10.1086/163168](https://doi.org/10.1086/163168).
54. Two-dimensional simulation of the gravitational system dynamics and formation of the large-scale structure of the Universe / A. G. Doroshkevich [и др.] // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 1980. — сент. — т. 192, № 2. — с. 321—337. — DOI: [10.1093/mnras/192.2.321](https://doi.org/10.1093/mnras/192.2.321). — URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/192.2.321>.
55. *Doroshkevich A. G., Khlopov M. Y.* Formation of structure in a universe with unstable neutrinos // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 1984. — нояб. — т. 211, № 2. — с. 277—282. — DOI: [10.1093/mnras/211.2.277](https://doi.org/10.1093/mnras/211.2.277). — eprint: <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/211/2/277/>

- 3692620/mnras211-0277.pdf. — URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/211.2.277>.
56. *Doroshkevich A., Klypin A., Kotok E. V.* Evolution of Inhomogeneities in Unstable Neutrino Cosmologies // Soviet Astronomy. — 1986. — т. 30. — с. 251—256.
 57. *Doroshkevich A. G., Klypin A. A., Khlopov M. Y.* Cosmological Models with Unstable Neutrinos // Soviet Astronomy. — 1988. — апр. — т. 32. — с. 127.
 58. *Navarro J. F., Frenk C. S., White S. D. M.* The Structure of Cold Dark Matter Halos // The Astrophysical Journal. — 1996. — май. — т. 462. — с. 563. — DOI: [10.1086/177173](https://doi.org/10.1086/177173). — URL: <http://dx.doi.org/10.1086/177173>.
 59. *Eisenstein D. J., Hu W.* Power Spectra for Cold Dark Matter and Its Variants // The Astrophysical Journal. — 1999. — янв. — т. 511, № 1. — с. 5—15. — DOI: [10.1086/306640](https://doi.org/10.1086/306640). — URL: <http://dx.doi.org/10.1086/306640>.
 60. Properties of galaxies reproduced by a hydrodynamic simulation / M. Vogelsberger [и др.] // Nature. — 2014. — май. — т. 509, № 7499. — с. 177—182. — DOI: [10.1038/nature13316](https://doi.org/10.1038/nature13316). — URL: <http://dx.doi.org/10.1038/nature13316>.
 61. The EAGLE project: simulating the evolution and assembly of galaxies and their environments / J. Schaye [и др.] // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2014. — нояб. — т. 446, № 1. — с. 521—554. — DOI: [10.1093/mnras/stu2058](https://doi.org/10.1093/mnras/stu2058). — URL: <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stu2058>.
 62. Mass Density Profiles of Low Surface Brightness Galaxies / W. J. G. de Blok [и др.] // The Astrophysical Journal. — 2001. — май. — т. 552, № 1. — с. L23—L26. — DOI: [10.1086/320262](https://doi.org/10.1086/320262). — URL: <https://doi.org/10.1086/320262>.
 63. *Walker M. G., Peñarrubia J.* A METHOD FOR MEASURING (SLOPES OF) THE MASS PROFILES OF DWARF SPHEROIDAL GALAXIES // The Astrophysical Journal. — 2011. — нояб. — т. 742, № 1. — с. 20. — DOI: [10.1088/0004-637x/742/1/20](https://doi.org/10.1088/0004-637x/742/1/20). — URL: <https://doi.org/10.1088/0004-637x/742/1/20>.
 64. Does the Fornax dwarf spheroidal have a central cusp or core? / T. Goerdt [и др.] // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2006. — апр. — т. 368, № 3. — с. 1073—1077. — DOI: [10.1111/j.1365-2966.2006.10182.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2006.10182.x). —

- eprint: <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/368/3/1073/18665310/mnras0368-1073.pdf>. — URL: <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2006.10182.x>.
65. *Moore B.* Evidence against dissipation-less dark matter from observations of galaxy haloes // *Nature*. — 1994. — авг. — т. 370, № 6491. — с. 629—631. — DOI: [10.1038/370629a0](https://doi.org/10.1038/370629a0).
 66. HIGH-RESOLUTION MASS MODELS OF DWARF GALAXIES FROM LITTLE THINGS / S.-H. Oh [и др.] // *The Astronomical Journal*. — 2015. — май. — т. 149, № 6. — с. 180. — DOI: [10.1088/0004-6256/149/6/180](https://doi.org/10.1088/0004-6256/149/6/180). — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/0004-6256/149/6/180>.
 67. *Дорошкевич А. Г., Лукаш В. Н., Михеева Е. В.* К решению проблем каспов и кривых вращения в гало тёмной материи в космологической стандартной модели // *Усп. физ. наук*. — 2012. — т. 182, № 1. — с. 3—18. — DOI: [10.3367/UFNr.0182.201201a.0003](https://doi.org/10.3367/UFNr.0182.201201a.0003). — URL: <https://ufn.ru/ru/articles/2012/1/b/>.
 68. Quantifying the heart of darkness with GHALO – a multibillion particle simulation of a galactic halo / J. Stadel [и др.] // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*. — 2009. — сент. — т. 398, № 1. — с. L21—L25. — DOI: [10.1111/j.1745-3933.2009.00699.x](https://doi.org/10.1111/j.1745-3933.2009.00699.x). — URL: <https://doi.org/10.1111/j.1745-3933.2009.00699.x>.
 69. Empirical Models for Dark Matter Halos. I. Nonparametric Construction of Density Profiles and Comparison with Parametric Models / D. Merritt [и др.] // *The Astronomical Journal*. — 2006. — янв. — т. 132, № 6. — с. 2685—2700. — DOI: [10.1086/508988](https://doi.org/10.1086/508988). — URL: <http://dx.doi.org/10.1086/508988>.
 70. The Aquarius Project: the subhaloes of galactic haloes / V. Springel [и др.] // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2008. — дек.
 71. The diversity and similarity of simulated cold dark matter haloes / J. F. Navarro [и др.] // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2010. — февр. — т. 402, № 1. — с. 21—34. — DOI: [10.1111/j.1365-2966.2009.15878.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.15878.x). — arXiv: [0810.1522](https://arxiv.org/abs/0810.1522) [[astro-ph](https://arxiv.org/abs/0810.1522)].

72. The dependence of dark matter profiles on the stellar-to-halo mass ratio: a prediction for cusps versus cores / A. Di Cintio [и др.] // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2013. — нояб. — т. 437, № 1. — с. 415—423. — DOI: [10.1093/mnras/stt1891](https://doi.org/10.1093/mnras/stt1891). — eprint: <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/437/1/415/18452732/stt1891.pdf>. — URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/stt1891>.
73. *Read J. I., Agertz O., Collins M. L. M.* Dark matter cores all the way down // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2016. — март. — т. 459, № 3. — с. 2573—2590. — DOI: [10.1093/mnras/stw713](https://doi.org/10.1093/mnras/stw713). — eprint: <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/459/3/2573/8105757/stw713.pdf>. — URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/stw713>.
74. *Demiański M., Doroshkevich A.* The patch like model of galaxies formation: the virial paradox, core-cusp and missing satellite problems // arXiv: Cosmology and Nongalactic Astrophysics. — 2020.
75. Cuspy no more: how outflows affect the central dark matter and baryon distribution in Λ cold dark matter galaxies / F. Governato [и др.] // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2012. — апр. — т. 422, № 2. — с. 1231—1240. — DOI: [10.1111/j.1365-2966.2012.20696.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.20696.x). — URL: <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.20696.x>.
76. NIHAO IX: the role of gas inflows and outflows in driving the contraction and expansion of cold dark matter haloes / A. A. Dutton [и др.] // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2016. — июль. — т. 461, № 3. — с. 2658—2675. — DOI: [10.1093/mnras/stw1537](https://doi.org/10.1093/mnras/stw1537). — eprint: <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/461/3/2658/8112214/stw1537.pdf>. — URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/stw1537>.
77. A dark matter profile to model diverse feedback-induced core sizes of Λ CDM haloes / A. Lazar [и др.] // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2020. — июль. — т. 497, № 2. — с. 2393—2417. — DOI: [10.1093/mnras/staa2101](https://doi.org/10.1093/mnras/staa2101). — eprint: <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/497/2/2393/33571817/staa2101.pdf>. — URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/staa2101>.
78. *Navarro J. F., Eke V. R., Frenk C. S.* The cores of dwarf galaxy haloes // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 1996. — дек. — т.

- 283, № 3. — с. L72—L78. — DOI: [10.1093/mnras/283.3.l72](https://doi.org/10.1093/mnras/283.3.l72). — URL: <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/283.3.L72>.
79. *Pontzen A., Governato F.* How supernova feedback turns dark matter cusps into cores // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2012. — март. — т. 421, № 4. — с. 3464—3471. — DOI: [10.1111/j.1365-2966.2012.20571.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.20571.x). — URL: <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.20571.x>.
80. NIHAO-XXIII. Dark matter density shaped by black hole feedback / A. V. Macciò [и др.] // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters. — 2020. — апр. — т. 495, № 1. — с. L46—L50. — DOI: [10.1093/mnrasl/slaa058](https://doi.org/10.1093/mnrasl/slaa058). — eprint: <https://academic.oup.com/mnrasl/article-pdf/495/1/L46/33097484/slaa058.pdf>. — URL: <https://doi.org/10.1093/mnrasl/slaa058>.
81. *Chen J., Bryan G. L., Salem M.* Cosmological simulations of dwarf galaxies with cosmic ray feedback // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2016. — май. — т. 460, № 3. — с. 3335—3344. — DOI: [10.1093/mnras/stw1197](https://doi.org/10.1093/mnras/stw1197). — eprint: <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/460/3/3335/8130360/stw1197.pdf>. — URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/stw1197>.
82. *Mikheeva E., Doroshkevich A., Lukash V.* A solution of the cusp problem in relaxed halos of dark matter // Nuovo Cim. B. — 2007. — т. 122. — с. 1393—1398. — DOI: [10.1393/ncb/i2008-10503-1](https://doi.org/10.1393/ncb/i2008-10503-1). — arXiv: [0712.1688](https://arxiv.org/abs/0712.1688) [astro-ph].
83. The haloes of bright satellite galaxies in a warm dark matter universe / M. R. Lovell [и др.] // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2012. — янв. — т. 420, № 3. — с. 2318—2324. — DOI: [10.1111/j.1365-2966.2011.20200.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.20200.x). — URL: <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.20200.x>.
84. Core formation in dwarf haloes with self-interacting dark matter: no fine-tuning necessary / O. D. Elbert [и др.] // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2015. — авг. — т. 453, № 1. — с. 29—37. — DOI: [10.1093/mnras/stv1470](https://doi.org/10.1093/mnras/stv1470). — URL: <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stv1470>.
85. Space mission Millimetron for terahertz astronomy / A. V. Smirnov [и др.] // Space Telescopes and Instrumentation 2012: Optical, Infrared, and Millimeter Wave. т. 8442 / под ред. М. С. Clampin [и др.]. — 09.2012. — с. 84424C. — (Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series). — DOI: [10.1117/12.927184](https://doi.org/10.1117/12.927184).

86. Review of scientific topics for the Millimetron space observatory / N. S. Kardashev [и др.] // *Physics Uspekhi*. — 2014. — дек. — т. 57, № 12. — с. 1199—1228. — DOI: [10.3367/UFNe.0184.201412c.1319](https://doi.org/10.3367/UFNe.0184.201412c.1319). — arXiv: [1502.06071](https://arxiv.org/abs/1502.06071) [[astro-ph.IM](https://arxiv.org/archive/astro-ph)].
87. *Пилепенко С. В.* Космический инфракрасный фон: как его смоделировать и как разобраться в путанице // *Физика Космоса: труды 47-й Международной студенческой научной конференции*.—Екатеринбург, 2018. — Издательство Уральского университета. 2018. — с. 83—94.
88. *Springel V.* The cosmological simulation code GADGET-2 // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2005. — дек. — т. 364. — с. 1105—1134. — DOI: [10.1111/j.1365-2966.2005.09655.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2005.09655.x). — eprint: [astro-ph/0505010](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0505010).
89. *Springel V., Frenk C. S., White S. D. M.* The large-scale structure of the Universe // *Nature*. — 2006. — апр. — т. 440, № 7088. — с. 1137—1144. — DOI: [10.1038/nature04805](https://doi.org/10.1038/nature04805). — URL: <http://dx.doi.org/10.1038/nature04805>.
90. Where Are the Missing Galactic Satellites? / A. Klypin [и др.] // *The Astrophysical Journal*. — 1999. — сент. — т. 522, № 1. — с. 82—92. — DOI: [10.1086/307643](https://doi.org/10.1086/307643). — URL: <http://dx.doi.org/10.1086/307643>.
91. *Tikhonov A. V., Klypin A.* The emptiness of voids: yet another overabundance problem for the Λ cold dark matter model // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2009. — июнь. — т. 395, № 4. — с. 1915—1924. — DOI: [10.1111/j.1365-2966.2009.14686.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.14686.x). — URL: <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.14686.x>.
92. *Boylan-Kolchin M., Bullock J. S., Kaplinghat M.* The Milky Way's bright satellites as an apparent failure of Λ CDM // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2012. — март. — т. 422, № 2. — с. 1203—1218. — DOI: [10.1111/j.1365-2966.2012.20695.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.20695.x). — URL: <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.20695.x>.
93. Abundance of field galaxies / A. Klypin [и др.] // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2015. — дек. — т. 454, № 2. — с. 1798—1810. — DOI: [10.1093/mnras/stv2040](https://doi.org/10.1093/mnras/stv2040). — arXiv: [1405.4523](https://arxiv.org/abs/1405.4523) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/archive/astro-ph)].

94. Cosmology and large scale structure / S. White [и др.]. — Amsterdam, 1996. — с. 349.
95. *Burkert A.* The Structure of Dark Matter Halos in Dwarf Galaxies // The Astrophysical Journal. — 1995. — июль. — т. 447, № 1. — DOI: [10.1086/309560](https://doi.org/10.1086/309560). — URL: <http://dx.doi.org/10.1086/309560>.
96. *Navarro J. F., Frenk C. S., White S. D. M.* A Universal Density Profile from Hierarchical Clustering // The Astrophysical Journal. — 1997. — дек. — т. 490, № 2. — с. 493—508. — DOI: [10.1086/304888](https://doi.org/10.1086/304888). — URL: <http://dx.doi.org/10.1086/304888>.
97. *Jing Y. P.* The Density Profile of Equilibrium and Nonequilibrium Dark Matter Halos // The Astrophysical Journal. — 2000. — май. — т. 535, № 1. — с. 30—36. — DOI: [10.1086/308809](https://doi.org/10.1086/308809). — URL: <http://dx.doi.org/10.1086/308809>.
98. Assembly history and structure of galactic cold dark matter haloes / J. Wang [и др.] // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2011. — март. — т. 413, № 2. — с. 1373—1382. — DOI: [10.1111/j.1365-2966.2011.18220.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.18220.x). — URL: <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.18220.x>.
99. *Boylan-Kolchin M., Ma C.-P.* Major mergers of galaxy haloes: cuspy or cored inner density profile? // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2004. — апр. — т. 349, № 3. — с. 1117—1129. — DOI: [10.1111/j.1365-2966.2004.07585.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2004.07585.x). — arXiv: [astro-ph/0309243](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0309243) [[astro-ph](https://arxiv.org/abs/astro-ph)].
100. *Vasiliev E.* Dark matter annihilation near a black hole: Plateau versus weak cusp // Physical Review D. — 2007. — сент. — т. 76, № 10. — DOI: [10.1103/PhysRevD.76.103532](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.76.103532). — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.76.103532>.
101. *Gondolo P., Silk J.* Dark Matter Annihilation at the Galactic Center // Physical Review Letters. — 1999. — авг. — т. 83, № 9. — с. 1719—1722. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.83.1719](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.1719). — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.1719>.
102. *Lynden-Bell D.* Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 1967. — янв.

1. *М. В. Ткачев С. В. Пилипенко Э. К.* Моделирование гало темной материи. Проверка энтропийного подхода к проблеме каспов // *Астрономический Журнал*. — 2019. — май. — т. 63, № 5. — с. 372—377. — DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063772919050068>.
103. Constrained Local Universe Simulations: a Local Group factory / E. Carlesi [и др.] // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2016. — март. — т. 458, № 1. — с. 900—911. — DOI: [10.1093/mnras/stw357](https://doi.org/10.1093/mnras/stw357). — eprint: <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/458/1/900/8181824/stw357.pdf>. — URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/stw357>.
104. *Knollmann S. R., Knebe A.* AHF: AMIGA'S HALO FINDER // *The Astrophysical Journal Supplement Series*. — 2009. — май. — т. 182, № 2. — с. 608—624. — DOI: [10.1088/0067-0049/182/2/608](https://doi.org/10.1088/0067-0049/182/2/608). — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/0067-0049/182/2/608>.
105. *Ishiyama T.* Hierarchical Formation of Dark Matter Halos and the Free Streaming Scale // *The Astrophysical Journal*. — 2014. — июнь. — т. 788, № 1. — с. 27. — DOI: [10.1088/0004-637X/788/1/27](https://doi.org/10.1088/0004-637X/788/1/27). — arXiv: [1404.1650](https://arxiv.org/abs/1404.1650) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/abs/1404.1650)].
106. *Lonsdale C.* Modeling the cosmic infrared background. // *The COBE Workshop: Unveiling the cosmic infrared background*. т. 348 / под ред. E. Dwek. — 01.1996. — с. 147—158. — (American Institute of Physics Conference Series). — DOI: [10.1063/1.49249](https://doi.org/10.1063/1.49249).
107. Galaxy evolution from deep multi-wavelength infrared surveys: a prelude to Herschel / A. Franceschini [и др.] // *Astronomy & Astrophysics*. — 2010. — июль. — т. 517. — A74. — DOI: [10.1051/0004-6361/200912622](https://doi.org/10.1051/0004-6361/200912622). — arXiv: [0906.4264](https://arxiv.org/abs/0906.4264) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/abs/0906.4264)].
108. *Rowan-Robinson M.* A new model for infrared and submillimetre counts // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2009. — март. — т. 394, № 1. — с. 117—123. — DOI: [10.1111/j.1365-2966.2008.14339.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2008.14339.x). — arXiv: [0812.2609](https://arxiv.org/abs/0812.2609) [[astro-ph](https://arxiv.org/abs/0812.2609)].
109. A Backward Evolution Model for Infrared Surveys: The Role of AGN- and Color- L_{TIR} Distributions / E. Valiante [и др.] // *Astrophysical Journal*. — 2009. — авг. — т. 701, № 2. — с. 1814—1838. — DOI: [10.1088/0004-637X/701/2/1814](https://doi.org/10.1088/0004-637X/701/2/1814). — arXiv: [0906.4110](https://arxiv.org/abs/0906.4110) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/abs/0906.4110)].

110. *Lagache G., Dole H., Puget J. .-L.* Modelling infrared galaxy evolution using a phenomenological approach // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2003. — янв. — т. 338, № 3. — с. 555—571. — DOI: [10.1046/j.1365-8711.2003.05971.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2003.05971.x). — arXiv: [astro-ph/0209115](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0209115) [[astro-ph](#)].
111. *Dole H., Lagache G., Puget J. .-L.* Predictions for Cosmological Infrared Surveys from Space with the Multiband Imaging Photometer for SIRTf // Astrophysical Journal. — 2003. — март. — т. 585, № 2. — с. 617—629. — DOI: [10.1086/346130](https://doi.org/10.1086/346130). — arXiv: [astro-ph/0211312](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0211312) [[astro-ph](#)].
112. Modeling the evolution of infrared galaxies: a parametric backward evolution model / М. Béthermin [и др.] // Astronomy & Astrophysics. — 2011. — май. — т. 529. — А4. — DOI: [10.1051/0004-6361/201015841](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201015841). — arXiv: [1010.1150](https://arxiv.org/abs/1010.1150) [[astro-ph.CO](#)].
113. A Unified Empirical Model for Infrared Galaxy Counts Based on the Observed Physical Evolution of Distant Galaxies / М. Béthermin [и др.] // Astrophysical Journal Letters. — 2012. — окт. — т. 757, № 2. — с. L23. — DOI: [10.1088/2041-8205/757/2/L23](https://doi.org/10.1088/2041-8205/757/2/L23). — arXiv: [1208.6512](https://arxiv.org/abs/1208.6512) [[astro-ph.CO](#)].
114. Far-infrared detection limits - II. Probing confusion including source confusion / W.-S. Jeong [и др.] // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2006. — июнь. — т. 369, № 1. — с. 281—294. — DOI: [10.1111/j.1365-2966.2006.10285.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2006.10285.x). — arXiv: [astro-ph/0603163](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0603163) [[astro-ph](#)].
115. Modelling galaxy and AGN evolution in the infrared: black hole accretion versus star formation activity / С. Gruppioni [и др.] // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2011. — сент. — т. 416, № 1. — с. 70—86. — DOI: [10.1111/j.1365-2966.2011.19006.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.19006.x). — arXiv: [1105.1955](https://arxiv.org/abs/1105.1955) [[astro-ph.CO](#)].
116. A fundamental problem in our understanding of low-mass galaxy evolution / S. M. Weinmann [и др.] // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2012. — нояб. — т. 426, № 4. — с. 2797—2812. — DOI: [10.1111/j.1365-2966.2012.21931.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.21931.x). — arXiv: [1204.4184](https://arxiv.org/abs/1204.4184) [[astro-ph.CO](#)].
117. *Rahmati A., van der Werf P. P.* Genesis of the dusty Universe: modelling submillimetre source counts // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2011. — нояб. — т. 418, № 1. — с. 176—194. — DOI: [10.1111/j.1365-2966.2011.19475.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.19475.x). — arXiv: [1107.4290](https://arxiv.org/abs/1107.4290) [[astro-ph.CO](#)].

118. Dusty starburst galaxies in the early Universe as revealed by gravitational lensing / J. D. Vieira [и др.] // *Nature*. — 2013. — март. — т. 495, № 7441. — с. 344—347. — DOI: [10.1038/nature12001](https://doi.org/10.1038/nature12001). — arXiv: [1303.2723](https://arxiv.org/abs/1303.2723) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/abs/1303.2723)].
119. The Detection of a Population of Submillimeter-Bright, Strongly Lensed Galaxies / M. Negrello [и др.] // *Science*. — 2010. — нояб. — т. 330, № 6005. — с. 800. — DOI: [10.1126/science.1193420](https://doi.org/10.1126/science.1193420). — arXiv: [1011.1255](https://arxiv.org/abs/1011.1255) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/abs/1011.1255)].
120. Extragalactic background light inferred from AEGIS galaxy-SED-type fractions / A. Dominguez [и др.] // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2011. — февр. — т. 410, № 4. — с. 2556—2578. — DOI: [10.1111/j.1365-2966.2010.17631.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2010.17631.x). — arXiv: [1007.1459](https://arxiv.org/abs/1007.1459) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/abs/1007.1459)].
121. *Devriendt J. E. G., Guiderdoni B.* Galaxy modelling. II. Multi-wavelength faint counts from a semi-analytic model of galaxy formation // *Astronomy & Astrophysics*. — 2000. — нояб. — т. 363. — с. 851—862. — arXiv: [astro-ph/0010198](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0010198) [[astro-ph](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0010198)].
122. The Impact of Cold Gas Accretion Above a Mass Floor on Galaxy Scaling Relations / N. Bouché [и др.] // *Astrophysical Journal*. — 2010. — авг. — т. 718, № 2. — с. 1001—1018. — DOI: [10.1088/0004-637X/718/2/1001](https://doi.org/10.1088/0004-637X/718/2/1001). — arXiv: [0912.1858](https://arxiv.org/abs/0912.1858) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/abs/0912.1858)].
123. *Conroy C., Wechsler R. H.* Connecting Galaxies, Halos, and Star Formation Rates Across Cosmic Time // *The Astrophysical Journal*. — 2009. — май. — т. 696, № 1. — с. 620—635. — DOI: [10.1088/0004-637X/696/1/620](https://doi.org/10.1088/0004-637X/696/1/620). — arXiv: [0805.3346](https://arxiv.org/abs/0805.3346) [[astro-ph](https://arxiv.org/abs/0805.3346)].
124. A Cosmological Framework for the Co-Evolution of Quasars, Supermassive Black Holes, and Elliptical Galaxies. I. Galaxy Mergers and Quasar Activity / P. F. Hopkins [и др.] // *Astronomy & Astrophysics Supplement*. — 2008. — апр. — т. 175, № 2. — с. 356—389. — DOI: [10.1086/524362](https://doi.org/10.1086/524362). — arXiv: [0706.1243](https://arxiv.org/abs/0706.1243) [[astro-ph](https://arxiv.org/abs/0706.1243)].
125. Semi-analytic modelling of galaxy evolution in the IR/submm range / B. Guiderdoni [и др.] // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 1998. — апр. — т. 295, № 4. — с. 877—898. — DOI: [10.1046/j.1365-8711.1998.01308.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.1998.01308.x). — arXiv: [astro-ph/9710340](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9710340) [[astro-ph](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9710340)].

126. A Physical Model for the Coevolution of QSOs and Their Spheroidal Hosts / G. L. Granato [и др.] // The Astrophysical Journal. — 2004. — янв. — т. 600, № 2. — с. 580—594. — DOI: [10.1086/379875](https://doi.org/10.1086/379875). — arXiv: [astro-ph/0307202](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0307202) [[astro-ph](#)].
127. Predictions for Herschel from Λ -cold dark matter: unveiling the cosmic star formation history / C. G. Lacey [и др.] // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2010. — июнь. — т. 405, № 1. — с. 2—28. — DOI: [10.1111/j.1365-2966.2010.16463.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2010.16463.x). — arXiv: [0909.1567](https://arxiv.org/abs/0909.1567) [[astro-ph.CO](#)].
128. Hierarchical galaxy formation / S. Cole [и др.] // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2000. — нояб. — т. 319, № 1. — с. 168—204. — DOI: [10.1046/j.1365-8711.2000.03879.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2000.03879.x). — arXiv: [astro-ph/0007281](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0007281) [[astro-ph](#)].
129. Active Galactic Nuclei In Cosmological Simulations - I. Formation of black holes and spheroids through mergers / A. Cattaneo [и др.] // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2005. — дек. — т. 364, № 2. — с. 407—423. — DOI: [10.1111/j.1365-2966.2005.09608.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2005.09608.x). — arXiv: [astro-ph/0509116](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0509116) [[astro-ph](#)].
130. Modelling the galaxy bimodality: shutdown above a critical halo mass / A. Cattaneo [и др.] // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2006. — авг. — т. 370, № 4. — с. 1651—1665. — DOI: [10.1111/j.1365-2966.2006.10608.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2006.10608.x). — arXiv: [astro-ph/0601295](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0601295) [[astro-ph](#)].
131. Galaxy stellar mass assembly: the difficulty matching observations and semi-analytical predictions / M. Cousin [и др.] // Astrophysical Journal. — 2015. — март. — т. 575. — A32. — DOI: [10.1051/0004-6361/201323062](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201323062). — arXiv: [1410.4937](https://arxiv.org/abs/1410.4937) [[astro-ph.GA](#)].
132. Simulations of the galaxy population constrained by observations from $z = 3$ to the present day: implications for galactic winds and the fate of their ejecta / B. M. B. Henriques [и др.] // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2013. — июнь. — т. 431, № 4. — с. 3373—3395. — DOI: [10.1093/mnras/stt415](https://doi.org/10.1093/mnras/stt415). — arXiv: [1212.1717](https://arxiv.org/abs/1212.1717) [[astro-ph.CO](#)].
133. MultiDark simulations: the story of dark matter halo concentrations and density profiles / A. Klypin [и др.] // Monthly Notices of the Royal

- Astronomical Society. — 2016. — апр. — т. 457, № 4. — с. 4340—4359. — DOI: [10.1093/mnras/stw248](https://doi.org/10.1093/mnras/stw248). — arXiv: [1411.4001](https://arxiv.org/abs/1411.4001) [[astro-ph.CO](#)].
2. *С. В. Пилепенко; М. В. Ткачев; А. Ермаш Т. И. Л. Е. В. М. В. Н. Л.* Модель инфракрасного фона неба, созданного далекими галактиками // Письма в Астрономический журнал. — 2017. — окт. — т. 43, № 10. — с. 644—655. — DOI: [10.1134/s1063773717100073](https://doi.org/10.1134/s1063773717100073). — URL: <http://dx.doi.org/10.1134/S1063773717100073>.
134. Large scale structure in the SDSS galaxy survey / А. Doroshkevich [и др.] // Astronomy & Astrophysics. — 2004. — апр. — т. 418. — с. 7—23. — DOI: [10.1051/0004-6361:20031780](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20031780). — arXiv: [astro-ph/0307233](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0307233) [[astro-ph](#)].
135. *Pilipenko S. V.* The space distribution of quasars // Astronomy Reports. — 2007. — окт. — т. 51, № 10. — с. 820—829. — DOI: [10.1134/S106377290710006X](https://doi.org/10.1134/S106377290710006X).
136. A structure in the early Universe at $z \sim 1.3$ that exceeds the homogeneity scale of the R-W concordance cosmology / R. G. Clowes [и др.] // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2013. — март. — т. 429, № 4. — с. 2910—2916. — DOI: [10.1093/mnras/sts497](https://doi.org/10.1093/mnras/sts497). — arXiv: [1211.6256](https://arxiv.org/abs/1211.6256) [[astro-ph.CO](#)].
137. *Schneider P., Ehlers J., Falco E. E.* Gravitational Lenses. — 1992. — DOI: [10.1007/978-3-662-03758-4](https://doi.org/10.1007/978-3-662-03758-4).
138. *Schneider P.* Apparent number density enhancement of quasars near foreground galaxies due to gravitational lensing. I - Amplification cross sections. II - The amplification probability density distribution and results // Astronomy & Astrophysics. — 1987. — июнь. — т. 179, № 1/2. — с. 71—92.
139. HerMES: The Contribution to the Cosmic Infrared Background from Galaxies Selected by Mass and Redshift / M. P. Viero [и др.] // Astrophysical Journal. — 2013. — дек. — т. 779, № 1. — с. 32. — DOI: [10.1088/0004-637X/779/1/32](https://doi.org/10.1088/0004-637X/779/1/32). — arXiv: [1304.0446](https://arxiv.org/abs/1304.0446) [[astro-ph.CO](#)].
140. Improved models for cosmic infrared background anisotropies: new constraints on the infrared galaxy population / С. Shang [и др.] // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2012. — апр. — т. 421, № 4. — с. 2832—2845. — DOI: [10.1111/j.1365-2966.2012.20510.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.20510.x). — arXiv: [1109.1522](https://arxiv.org/abs/1109.1522) [[astro-ph.CO](#)].

141. How do galaxies get their gas? / D. Kereš [и др.] // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2005. — окт. — т. 363, № 1. — с. 2—28. — DOI: [10.1111/j.1365-2966.2005.09451.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2005.09451.x). — arXiv: [astro-ph/0407095](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0407095) [[astro-ph](#)].
142. Breaking the hierarchy of galaxy formation / R. G. Bower [и др.] // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2006. — авг. — т. 370, № 2. — с. 645—655. — DOI: [10.1111/j.1365-2966.2006.10519.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2006.10519.x). — arXiv: [astro-ph/0511338](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0511338) [[astro-ph](#)].
143. The many lives of active galactic nuclei: cooling flows, black holes and the luminosities and colours of galaxies / D. J. Croton [и др.] // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2006. — янв. — т. 365, № 1. — с. 11—28. — DOI: [10.1111/j.1365-2966.2005.09675.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2005.09675.x). — arXiv: [astro-ph/0508046](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0508046) [[astro-ph](#)].
144. *Michałowski M., Hjorth J., Watson D.* Cosmic evolution of submillimeter galaxies and their contribution to stellar mass assembly // *Astronomy & Astrophysics*. — 2010. — май. — т. 514. — A67. — DOI: [10.1051/0004-6361/200913634](https://doi.org/10.1051/0004-6361/200913634). — arXiv: [0905.4499](https://arxiv.org/abs/0905.4499) [[astro-ph.CO](#)].
145. *Chary R., Elbaz D.* Interpreting the Cosmic Infrared Background: Constraints on the Evolution of the Dust-enshrouded Star Formation Rate // *Astrophysical Journal*. — 2001. — авг. — т. 556, № 2. — с. 562—581. — DOI: [10.1086/321609](https://doi.org/10.1086/321609). — arXiv: [astro-ph/0103067](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0103067) [[astro-ph](#)].
146. The physical properties of star-forming galaxies in the low-redshift Universe / J. Brinchmann [и др.] // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2004. — июль. — т. 351, № 4. — с. 1151—1179. — DOI: [10.1111/j.1365-2966.2004.07881.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2004.07881.x). — arXiv: [astro-ph/0311060](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0311060) [[astro-ph](#)].
147. ALMA constraints on the faint millimetre source number counts and their contribution to the cosmic infrared background / S. Carniani [и др.] // *Astronomy & Astrophysics*. — 2015. — дек. — т. 584. — A78. — DOI: [10.1051/0004-6361/201525780](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201525780). — arXiv: [1502.00640](https://arxiv.org/abs/1502.00640) [[astro-ph.GA](#)].
148. ALMA Census of Faint 1.2 mm Sources Down to ~0.02 mJy: Extragalactic Background Light and Dust-poor, High-z Galaxies / S. Fujimoto [и др.] // *The Astrophysical Journal Supplement Series*. — 2016. — янв. — т. 222, № 1. — с. 1. — DOI: [10.3847/0067-0049/222/1/1](https://doi.org/10.3847/0067-0049/222/1/1). — arXiv: [1505.03523](https://arxiv.org/abs/1505.03523) [[astro-ph.GA](#)].

149. HerMES: The SPIRE confusion limit / Н. Т. Nguyen [и др.] // *Astronomy & Astrophysics*. — 2010. — июль. — т. 518. — с. L5. — DOI: [10.1051/0004-6361/201014680](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201014680). — URL: <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201014680>.
150. The pointing system of the Herschel space observatory / M. Sánchez-Portal [и др.] // *Experimental Astronomy*. — 2014. — июнь. — т. 37, № 2. — с. 453—479. — DOI: [10.1007/s10686-014-9396-z](https://doi.org/10.1007/s10686-014-9396-z). — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s10686-014-9396-z>.
151. The Effectiveness of Mid IR / Far IR Blind, Wide Area, Spectral Surveys in Breaking the Confusion Limit / G. Raymond [и др.] // *Publications of the Astronomical Society of Japan*. — 2010. — июнь. — т. 62, № 3. — с. 697—708. — DOI: [10.1093/pasj/62.3.697](https://doi.org/10.1093/pasj/62.3.697). — eprint: <https://academic.oup.com/pasj/article-pdf/62/3/697/17441473/pasj62-0697.pdf>. — URL: <https://doi.org/10.1093/pasj/62.3.697>.
152. A Novel Technique to Improve Photometry in Confused Images Using Graphs and Bayesian Priors / M. Safarzadeh [и др.] // *Astrophysical Journal*. — 2015. — янв. — т. 798, № 2. — с. 91. — DOI: [10.1088/0004-637X/798/2/91](https://doi.org/10.1088/0004-637X/798/2/91). — arXiv: [1408.2227 \[astro-ph.GA\]](https://arxiv.org/abs/1408.2227).
153. *Carr B. J., Hawking S. W.* Black holes in the early Universe // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 1974. — авг. — т. 168. — с. 399—416. — DOI: [10.1093/mnras/168.2.399](https://doi.org/10.1093/mnras/168.2.399).
154. *Hawking S. W.* Black hole explosions? // *Nature*. — 1974. — март. — т. 248, № 5443. — с. 30—31. — DOI: [10.1038/248030a0](https://doi.org/10.1038/248030a0).
155. New cosmological constraints on primordial black holes / B. J. Carr [и др.] // *Phys. Rev. D*. — 2010. — май. — т. 81, вып. 10. — с. 104019. — DOI: [10.1103/PhysRevD.81.104019](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.81.104019). — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.104019>.
156. *Page D. N., Hawking S. W.* Gamma rays from primordial black holes. // *Astrophysical Journal*. — 1976. — май. — т. 206. — с. 1—7. — DOI: [10.1086/154350](https://doi.org/10.1086/154350).
157. *Carr B. J.* Some cosmological consequences of primordial black-hole evaporations. // *Astrophysical Journal*. — 1976. — май. — т. 206. — с. 8—25. — DOI: [10.1086/154351](https://doi.org/10.1086/154351).

158. *Wright E. L.* On the Density of Primordial Black Holes in the Galactic Halo // *Astrophysical Journal*. — 1996. — март. — т. 459. — с. 487. — DOI: [10.1086/176910](https://doi.org/10.1086/176910). — arXiv: [astro-ph/9509074](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9509074) [[astro-ph](https://arxiv.org/abs/astro-ph)].
159. New constraints on the primordial black hole number density from Galactic γ -ray astronomy / R. Lehoucq [и др.] // *Astronomy & Astrophysics*. — 2009. — июнь. — т. 502, № 1. — с. 37–43. — DOI: [10.1051/0004-6361/200911961](https://doi.org/10.1051/0004-6361/200911961). — URL: <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/200911961>.
160. Antiprotons in the cosmic radiation / P. Kiraly [и др.] // *Nature*. — 1981. — сент. — т. 293, № 5828. — с. 120–122. — DOI: [10.1038/293120a0](https://doi.org/10.1038/293120a0). — URL: <https://doi.org/10.1038/293120a0>.
161. *MacGibbon J. H., Carr B. J.* Cosmic Rays from Primordial Black Holes // *Astrophysical Journal*. — 1991. — апр. — т. 371. — с. 447. — DOI: [10.1086/169909](https://doi.org/10.1086/169909).
162. *Okele P. N., Rees M. J.* Observational consequences of positron production by evaporating black holes // *Astronomy & Astrophysics*. — 1980. — янв. — т. 81, № 1/2. — с. 263.
163. *Bambi C., Dolgov A. D., Petrov A. A.* Primordial black holes and the observed Galactic 511 keV line // *Physics Letters B*. — 2008. — дек. — т. 670, № 3. — с. 174–178. — DOI: [10.1016/j.physletb.2008.10.057](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2008.10.057). — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2008.10.057>.
164. *Belotsky K., Kirillov A.* Primordial black holes with mass 10^{16} - 10^{17} g and reionization of the Universe // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. — 2015. — янв. — т. 2015, № 01. — с. 041–041. — DOI: [10.1088/1475-7516/2015/01/041](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2015/01/041). — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2015/01/041>.
165. *Belyanin A. A., Kocharovsky V. V., Kocharovsky V. V.* Gamma-ray bursts from the final stage of primordial black hole evaporation // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 1996. — нояб. — т. 283, № 2. — с. 626–634. — DOI: [10.1093/mnras/283.2.626](https://doi.org/10.1093/mnras/283.2.626). — eprint: <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/283/2/626/3103985/283-2-626.pdf>. — URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/283.2.626>.

166. *Cline D. B., Sanders D. A., Hong W.* Further Evidence for Some Gamma-Ray Bursts Consistent with Primordial Black Hole Evaporation // *The Astrophysical Journal*. — 1997. — сент. — т. 486, № 1. — с. 169—178. — DOI: [10.1086/304480](https://doi.org/10.1086/304480). — URL: <https://doi.org/10.1086/304480>.
167. *Carr B. J., Rees M. J.* Can pregalactic objects generate galaxies? // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 1984. — февр. — т. 206, № 4. — с. 801—818. — DOI: [10.1093/mnras/206.4.801](https://doi.org/10.1093/mnras/206.4.801). — eprint: <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/206/4/801/2902772/mnras206-0801.pdf>. — URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/206.4.801>.
168. *Bean R., Magueijo J.* Could supermassive black holes be quintessential primordial black holes? // *Phys. Rev. D*. — 2002. — сент. — т. 66, вып. 6. — с. 063505. — DOI: [10.1103/PhysRevD.66.063505](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.66.063505). — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.66.063505>.
169. *Meszaros P.* Primeval black holes and galaxy formation. // *Astronomy & Astrophysics*. — 1975. — янв. — т. 38, № 1. — с. 5—13.
170. *CHAPLINE G. F.* Cosmological effects of primordial black holes // *Nature*. — 1975. — янв. — т. 253, вып. 5489. — с. 251—252. — DOI: <https://doi.org/10.1038/253251a0>. — URL: [10.1038/253251a0](https://doi.org/10.1038/253251a0).
171. *Frampton P. H.* Searching for dark matter constituents with many solar masses // *Modern Physics Letters A*. — 2016. — май. — т. 31, № 16. — с. 1650093. — DOI: [10.1142/s0217732316500930](https://doi.org/10.1142/s0217732316500930). — URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S0217732316500930>.
172. *Kashlinsky A.* LIGO GRAVITATIONAL WAVE DETECTION, PRIMORDIAL BLACK HOLES, AND THE NEAR-IR COSMIC INFRARED BACKGROUND ANISOTROPIES // *The Astrophysical Journal*. — 2016. — май. — т. 823, № 2. — с. L25. — DOI: [10.3847/2041-8205/823/2/L25](https://doi.org/10.3847/2041-8205/823/2/L25). — URL: <https://doi.org/10.3847/2041-8205/823/2/L25>.
173. *Clesse S., García-Bellido J.* Seven hints for primordial black hole dark matter // *Physics of the Dark Universe*. — 2018. — дек. — т. 22. — с. 137—146. — DOI: [10.1016/j.dark.2018.08.004](https://doi.org/10.1016/j.dark.2018.08.004). — arXiv: [1711.10458](https://arxiv.org/abs/1711.10458) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/abs/1711.10458)].

174. *Espinosa J. R., Racco D., Riotto A.* Cosmological Signature of the Standard Model Higgs Vacuum Instability: Primordial Black Holes as Dark Matter // *Phys. Rev. Lett.* — 2018. — март. — т. 120, вып. 12. — с. 121301. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.120.121301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.121301). — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.120.121301>.
175. GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence / В. Р. Abbott [и др.] // *Physical Review Letters*. — 2016. — июнь. — т. 116, № 24. — с. 241103. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.116.241103](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.241103). — arXiv: [1606.04855](https://arxiv.org/abs/1606.04855) [gr-qc].
176. Astrophysical Implications of the Binary Black-hole Merger GW150914 / В. Р. Abbott [и др.] // *The Astrophysical Journal*. — 2016. — февр. — т. 818, № 2. — с. L22. — DOI: [10.3847/2041-8205/818/2/L22](https://doi.org/10.3847/2041-8205/818/2/L22). — arXiv: [1602.03846](https://arxiv.org/abs/1602.03846) [astro-ph.HE].
177. GW170104: Observation of a 50-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence at Redshift 0.2 / В. Р. Abbott [и др.] // *Physical Review Letters*. — 2017. — июнь. — т. 118, № 22. — с. 221101. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.118.221101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.221101). — arXiv: [1706.01812](https://arxiv.org/abs/1706.01812) [gr-qc].
178. GW170814: A Three-Detector Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Coalescence / В. Р. Abbott [и др.] // *Physical Review Letters*. — 2017. — окт. — т. 119, № 14. — с. 141101. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.119.141101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.141101). — arXiv: [1709.09660](https://arxiv.org/abs/1709.09660) [gr-qc].
179. GW170608: Observation of a 19 Solar-mass Binary Black Hole Coalescence / В. Р. Abbott [и др.] // *The Astrophysical Journal*. — 2017. — дек. — т. 851, № 2. — с. L35. — DOI: [10.3847/2041-8213/aa9f0c](https://doi.org/10.3847/2041-8213/aa9f0c). — arXiv: [1711.05578](https://arxiv.org/abs/1711.05578) [astro-ph.HE].
180. Properties and Astrophysical Implications of the 150 M_{\odot} Binary Black Hole Merger GW190521 / В. Р. Abbott [и др.] // *The Astrophysical Journal*. — 2020. — сент. — т. 900, № 1. — с. L13. — DOI: [10.3847/2041-8213/aba493](https://doi.org/10.3847/2041-8213/aba493). — URL: <https://doi.org/10.3847/2041-8213/aba493>.
181. *Carr B., Kühnel F., Sandstad M.* Primordial black holes as dark matter // *Physical Review D*. — 2016. — окт. — т. 94, № 8. — с. 083504. — DOI: [10.1103/PhysRevD.94.083504](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.083504). — arXiv: [1607.06077](https://arxiv.org/abs/1607.06077) [astro-ph.CO].

182. Primordial black hole constraints for extended mass functions / B. Carr [и др.] // *Physical Review D*. — 2017. — июль. — т. 96, № 2. — с. 023514. — DOI: [10.1103/PhysRevD.96.023514](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.023514). — arXiv: [1705.05567](https://arxiv.org/abs/1705.05567) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/abs/1705.05567)].
183. Primordial black holes—perspectives in gravitational wave astronomy / M. Sasaki [и др.] // *Classical and Quantum Gravity*. — 2018. — март. — т. 35, № 6. — с. 063001. — DOI: [10.1088/1361-6382/aaa7b4](https://doi.org/10.1088/1361-6382/aaa7b4). — arXiv: [1801.05235](https://arxiv.org/abs/1801.05235) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/abs/1801.05235)].
184. GWTC-1: A Gravitational-Wave Transient Catalog of Compact Binary Mergers Observed by LIGO and Virgo during the First and Second Observing Runs / B. P. Abbott [и др.] // *Phys. Rev. X*. — 2019. — сент. — т. 9, вып. 3. — с. 031040. — DOI: [10.1103/PhysRevX.9.031040](https://doi.org/10.1103/PhysRevX.9.031040). — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.9.031040>.
185. 1-OGC: The First Open Gravitational-wave Catalog of Binary Mergers from Analysis of Public Advanced LIGO Data / A. H. Nitz [и др.] // *The Astrophysical Journal*. — 2019. — февр. — т. 872, № 2. — с. 195. — DOI: [10.3847/1538-4357/ab0108](https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab0108). — URL: <http://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ab0108>.
186. Constraints on the Primordial Black Hole Abundance from the First Advanced LIGO Observation Run Using the Stochastic Gravitational-Wave Background / S. Wang [и др.] // arXiv e-prints. — 2016. — окт. — arXiv:1610.08725. — arXiv: [1610.08725](https://arxiv.org/abs/1610.08725) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/abs/1610.08725)].
187. *Raidal M., Vaskonen V., Veermäe H.* Gravitational waves from primordial black hole mergers // *Journal of Cosmology and Astro-Particle Physics*. — 2017. — сент. — т. 2017, № 9. — с. 037. — DOI: [10.1088/1475-7516/2017/09/037](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2017/09/037). — arXiv: [1707.01480](https://arxiv.org/abs/1707.01480) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/abs/1707.01480)].
188. *Ali-Haïmoud Y.* Correlation Function of High-Threshold Regions and Application to the Initial Small-Scale Clustering of Primordial Black Holes // *Physical Review Letters*. — 2018. — авг. — т. 121, № 8. — с. 081304. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.121.081304](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.081304). — arXiv: [1805.05912](https://arxiv.org/abs/1805.05912) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/abs/1805.05912)].
189. *Zumalac?rregui M., Seljak U. š.* Limits on Stellar-Mass Compact Objects as Dark Matter from Gravitational Lensing of Type Ia Supernovae // *Physical Review Letters*. — 2018. — окт. — т. 121, вып. 14. — с. 141101. — DOI:

- 10.1103/PhysRevLett.121.141101. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.121.141101>.
190. *Garcia-Bellido J., Clesse S., Fleury P.* LIGO Lo(g)Normal MACHO: Primordial Black Holes survive SN lensing constraints. — 2017. — arXiv: [1712.06574](https://arxiv.org/abs/1712.06574) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/abs/1712.06574)].
191. Formation and evolution of primordial black hole binaries in the early universe / M. Raidal [и др.] // Journal of Cosmology and Astro-Particle Physics. — 2019. — февр. — т. 2019, № 2. — с. 018. — DOI: [10.1088/1475-7516/2019/02/018](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2019/02/018). — arXiv: [1812.01930](https://arxiv.org/abs/1812.01930) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/abs/1812.01930)].
192. *Trashorras M., García-Bellido J., Nesseris S.* The clustering dynamics of primordial black holes in N -body simulations. — 2020. — arXiv: [2006.15018](https://arxiv.org/abs/2006.15018) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/abs/2006.15018)].
193. *García-Bellido J., Nesseris S.* Gravitational wave bursts from Primordial Black Hole hyperbolic encounters // Physics of the Dark Universe. — 2017. — т. 18. — с. 123—126. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.dark.2017.10.002>.
194. *Inman D., Ali-Haïmoud Y.* Early structure formation in primordial black hole cosmologies // Physical Review D. — 2019. — окт. — т. 100, № 8. — DOI: [10.1103/PhysRevD.100.083528](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.100.083528). — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.100.083528>.
195. *Peters P. C., Mathews J.* Gravitational Radiation from Point Masses in a Keplerian Orbit // Phys. Rev. — 1963. — июль. — т. 131, вып. 1. — с. 435—440. — DOI: [10.1103/PhysRev.131.435](https://doi.org/10.1103/PhysRev.131.435). — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.131.435>.
196. *Turner M.* Gravitational radiation from point-masses in unbound orbits: Newtonian results. // The Astrophysical Journal. — 1977. — сент. — т. 216. — с. 610—619. — DOI: [10.1086/155501](https://doi.org/10.1086/155501).
197. *Evans M. W., Harlow F. H.* A Machine Calculation Method for Hydrodynamic Problems. — Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California, 1955. — 51 p.
198. *Hockney R. W., Eastwood J. W.* Computer Simulation Using Particles. — McGraw-Hill International Book Company, 1981. — 540 p.

3. *Tkachev M. V., Pilipenko S. V., Yepes G.* Dark matter simulations with primordial black holes in the early Universe // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2020. — окт. — т. 499, № 4. — с. 4854—4862. — DOI: [10.1093/mnras/staa3103](https://doi.org/10.1093/mnras/staa3103). — URL: <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/staa3103>.
199. *Mack K. J., Ostriker J. P., Ricotti M.* Growth of Structure Seeded by Primordial Black Holes // Astrophysical Journal. — 2007. — авг. — т. 665, № 2. — с. 1277—1287. — DOI: [10.1086/518998](https://doi.org/10.1086/518998). — arXiv: [astro-ph/0608642](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0608642) [[astro-ph](https://arxiv.org/abs/astro-ph)].
200. *Desjacques V., Riotto A.* Spatial clustering of primordial black holes // Physical Review D. — 2018. — дек. — т. 98, № 12. — DOI: [10.1103/physrevd.98.123533](https://doi.org/10.1103/physrevd.98.123533). — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.98.123533>.
201. *Ballesteros G., Serpico P. D., Taoso M.* On the merger rate of primordial black holes: effects of nearest neighbours distribution and clustering // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. — 2018. — окт. — т. 2018, № 10. — с. 043—043. — DOI: [10.1088/1475-7516/2018/10/043](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2018/10/043). — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2018/10/043>.
202. Clusters of Primordial Black Holes / К. М. Belotsky [и др.] // The European Physical Journal C. — 2019. — март. — т. 79, № 3. — DOI: [10.1140/epjc/s10052-019-6741-4](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-019-6741-4). — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-019-6741-4>.
203. *Monaghan J. J., Lattanzio J. C.* A refined particle method for astrophysical problems // Astronomy & Astrophysics. — 1985. — авг. — т. 149, № 1. — с. 135—143.
204. The Cosmogrid Simulation: Statistical Properties of Small Dark Matter Halos / Т. Ishiyama [и др.] // Astrophysical Journal. — 2013. — апр. — т. 767, № 2. — с. 146. — DOI: [10.1088/0004-637X/767/2/146](https://doi.org/10.1088/0004-637X/767/2/146). — arXiv: [1101.2020](https://arxiv.org/abs/1101.2020) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/abs/astro-ph.CO)].
205. The evolution of large-scale structure in a universe dominated by cold dark matter / М. Davis [и др.] // Astrophysical Journal. — 1985. — май. — т. 292. — с. 371—394. — DOI: [10.1086/163168](https://doi.org/10.1086/163168).

206. *Vaskonen V., Veermäe H.* Lower bound on the primordial black hole merger rate // *Physical Review D*. — 2020. — февр. — т. 101, № 4. — DOI: [10.1103/physrevd.101.043015](https://doi.org/10.1103/physrevd.101.043015). — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.101.043015>.
207. The clustering evolution of primordial black holes / V. D. Luca [и др.] // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. — 2020. — окт. — т. 2020, № 11. — с. 028—028. — DOI: [10.1088/1475-7516/2020/11/028](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2020/11/028). — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2020/11/028>.
208. *Kavanagh B. J., Gaggero D., Bertone G.* Merger rate of a subdominant population of primordial black holes // *Physical Review D*. — 2018. — июль. — т. 98, № 2. — DOI: [10.1103/physrevd.98.023536](https://doi.org/10.1103/physrevd.98.023536). — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.98.023536>.
209. Primordial black holes confront LIGO/Virgo data: current situation / V. D. Luca [и др.] // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. — 2020. — июнь. — т. 2020, № 06. — с. 044—044. — DOI: [10.1088/1475-7516/2020/06/044](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2020/06/044). — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2020/06/044>.