

Искажения частотного спектра реликтового излучения и методы их исследования

Михальченко Артем Олегович

защита диссертации на соискание
учёной степени к.ф.-м.н.

Специальность 1.3.1
<<Физика космоса, астрономия>>

Научный руководитель:
проф. РАН, док. физ.-мат. наук,
Новиков Дмитрий Игоревич

Целями данной работы являются исследование особенностей частотного спектра реликтового излучения и выделение малых спектральных искажений реликта от фоновых компонент с плохо определёнными формами спектра. Для достижения поставленной цели были сформулированы и решены следующие основные задачи:

Глава 1: Исследование спектральных искажений параметров Стокса реликтового излучения, рассеянного на кластерах Сюняева-Зельдовича. Проведение независимой оценки низких мультиполей анизотропии реликтового фона. Разделение вкладов в анизотропию от эффекта Сакса-Вольфа и интегрального эффекта Сакса-Вольфа посредством наблюдения близких и удалённых скоплений галактик.

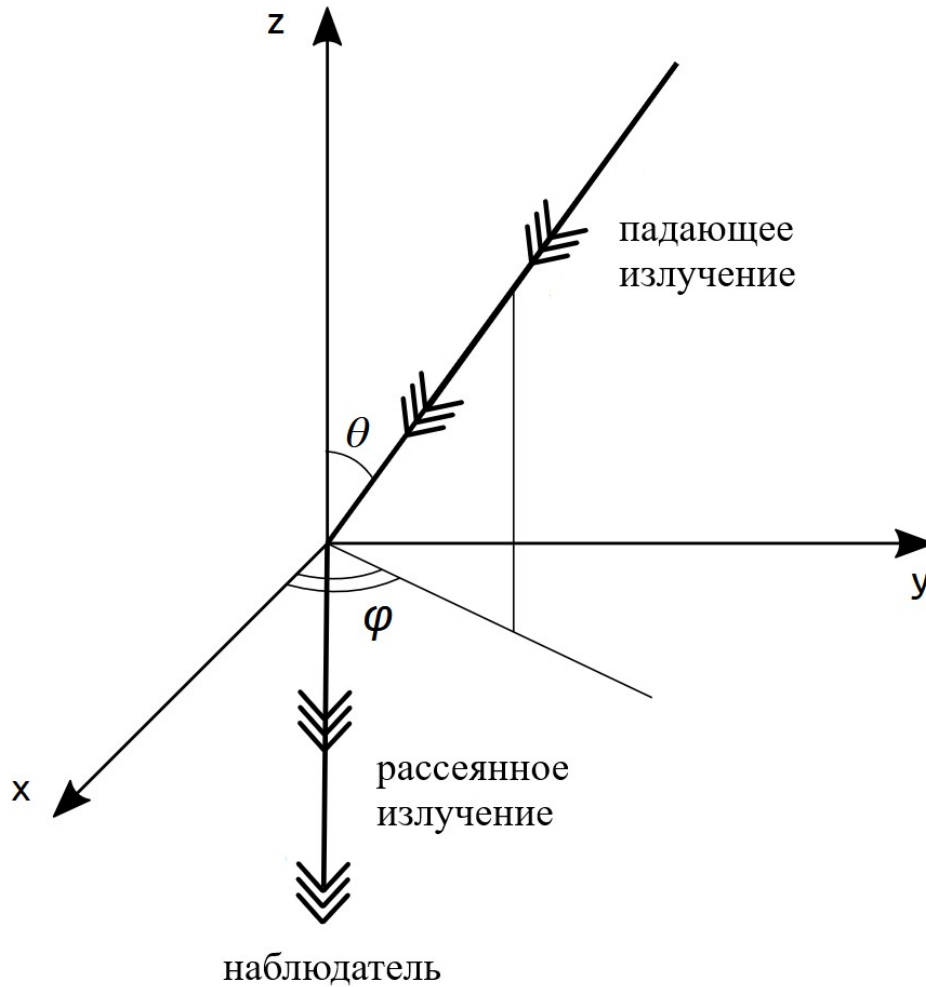
Глава 2: Разработка алгоритма обработки данных, который минимизирует вклад от любых фонов, параметры которых лежат внутри области изменения. Оценка области определения параметров, наборы которых определяют спектры модельных фоновых компонент.

Глава 3: Применение алгоритма для отделения μ искажения, u искажений и поправок к ним. Сравнение эффективности предложенных ранее методов (ILC, MIRC) с разработанным для набора фоновых компонент. Оценка оптимальной температуры для любого эксперимента по измерению монопольной части μ искажения реликтового излучения.

Глава I

Спектральные искажения
параметров Стокса из-за эффекта
Сюняева-Зельдовича и
независимая оценка малых
мультиполей реликтового
излучения

Рассеяние на скоплении



θ - угол рассеяния

φ - ориентация плоскости
рассеяния

Уравнение Компанейца

$$\nu^2 \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\sigma_T N_e h}{m_e c} \frac{\partial}{\partial \nu} \left[\nu^4 \left(n + n^2 + \frac{kT_e}{h} \frac{\partial n}{\partial \nu} \right) + \right. \\ \left. + \left(kT_e / m_e c^2 \right) R_1 + \left(kT_e / m_e c^2 \right)^2 R_2 + \dots \right]$$

[A. S. Kompaneets, *Sov. J. Exp. Theor. Phys.* 4, 730 (1957)]

Уравнение переноса поляризованного излучения в горячей электронной плазме

$$\delta \mathbf{J} / \delta \tau = \frac{3}{16\pi} \int_{\Omega} \left\{ \Delta \mathbf{R} + \Theta_e \Delta \left(\mathbf{S} - 2 \frac{T_r}{T_e} \mathbf{R} \right) + \Theta_e G_a(\Delta)(1 - \mu) \mathbf{R} \right\} d\Omega + \Theta_e G_i(\bar{n}) \mathbf{T} + O(\Theta^2)$$

[R. F. Stark, Mon. Not. R. Astron. Soc 195, 115 (1981)]

Здесь: $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} n(\nu, \Omega) \\ q(\nu, \Omega) \\ u(\nu, \Omega) \end{pmatrix}$ $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 + \mu^2 \\ (1 - \mu^2) \cos 2\varphi \\ (1 - \mu^2) \sin 2\varphi \end{pmatrix}$ $\mathbf{S} = 2 \begin{pmatrix} (1 - \mu)^2(1 + 2\mu) - 4\mu \\ (1 - \mu^2)(1 + 2\mu) \cos 2\varphi \\ (1 - \mu^2)(1 + 2\mu) \sin 2\varphi \end{pmatrix}$ $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Theta_e = \frac{kT_e}{m_e c^2}$ $x = \frac{h\nu}{kT_r}$

Также $G_a(\Delta) = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^4 \left(\frac{T_r}{T_e} \Delta + \frac{\partial \Delta}{\partial x} \right) \right] + 2 \frac{T_r}{T_e} n' \frac{\partial}{\partial x} [x^2 \Delta]$

$$G_i(\bar{n}) = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^4 \left(\frac{T_r}{T_e} (\bar{n} + \bar{n}^2) + \frac{\partial \bar{n}}{\partial x} \right) \right] \quad \text{(правая часть уравнения Компанейца)}$$

$$\bar{n}(\nu) = \frac{1}{4\pi} \int n'(\nu, \Omega) d\Omega \text{ и } \Delta = n'(\nu, \Omega) - \bar{n}(\nu)$$

Спектральные искажения параметров Стокса после однократного рассеяния

$$\delta \mathbf{J} / \delta \tau = \underbrace{g_1(x) \left[\frac{3}{16\pi} \int_{\Omega} \frac{\Delta_T(\Omega)}{T_r} (\mathbf{R} + \Theta_e \mathbf{S}) d\Omega \right]}_{(1)} + \underbrace{\Theta_e g_2(x) \left[\frac{3}{16\pi} \int_{\Omega} \frac{\Delta_T(\Omega)}{T_r} (1 - \mu) \mathbf{R} d\Omega \right]}_{(2)} + \underbrace{\Theta_e g_3(x) \mathbf{T}}_{(3)} \quad (tSZ)$$

три характерных части:

анизотропия РИ
+поляризация

$$g_1(x) = -x \frac{dB}{dx}$$

анизотропный эСЗ

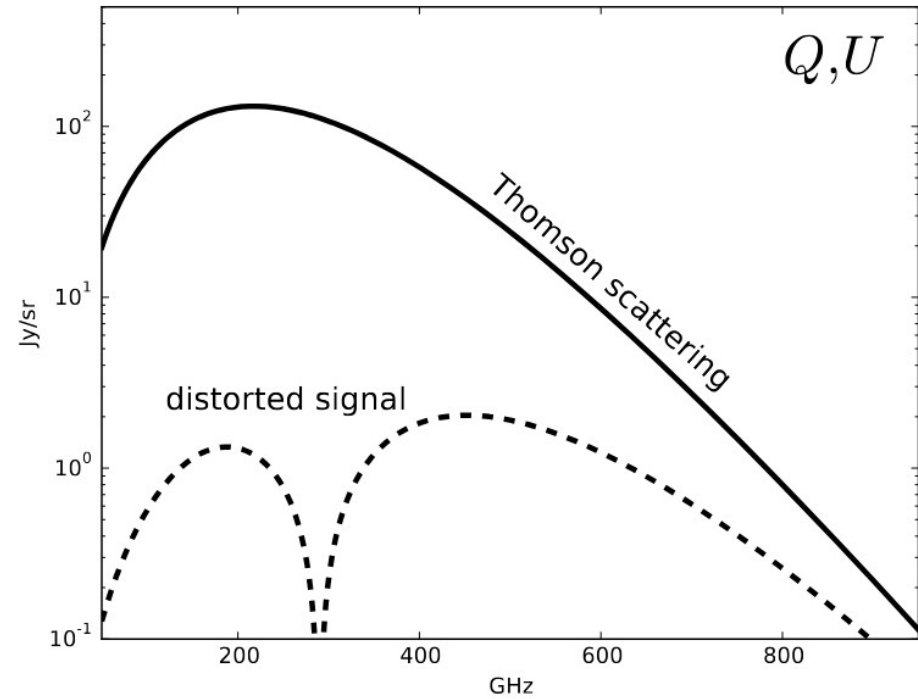
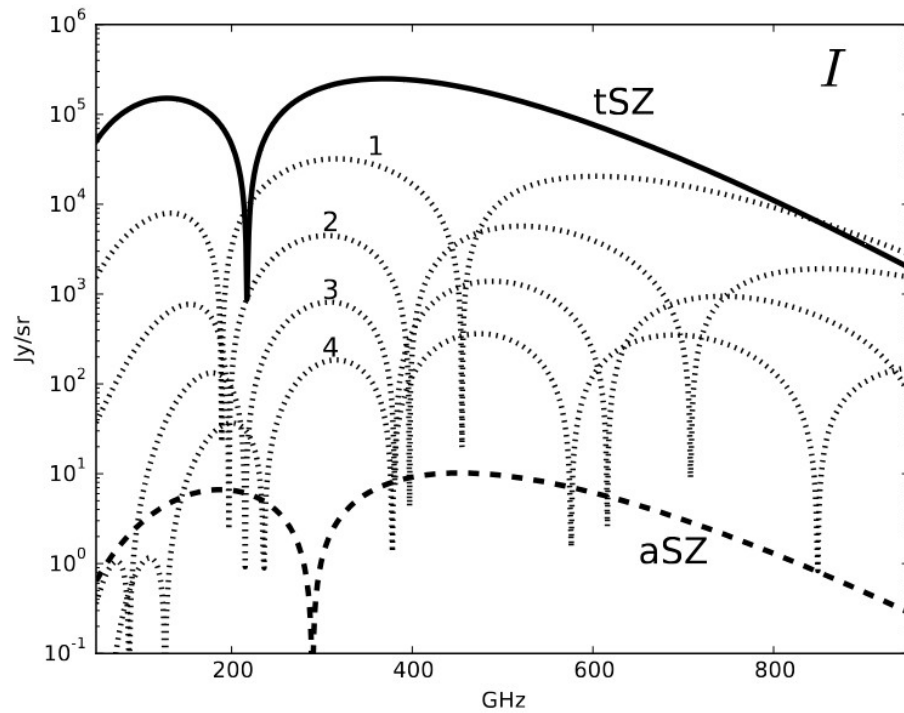
$$g_2(x) = \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left[x^4 \frac{d}{dx} \left(-x \frac{dB}{dx} \right) \right]$$

тепловой эСЗ

$$g_3(x) = \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left[x^4 \frac{dB}{dx} \right]$$

$$x = \frac{h\nu}{kT_r} \quad B(x) = \frac{1}{e^x - 1}$$

Искажения интенсивности и поляризации



Анализ искажений второго типа

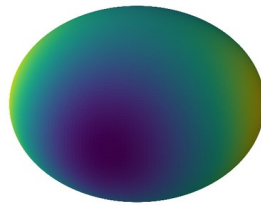
$$\Theta_e g_2(x) \left[\frac{3}{16\pi} \int_{\Omega} \frac{\Delta_T(\Omega)}{T_r} (1 - \mu) \mathbf{R} d\Omega \right]$$

$$\frac{\Delta_T(\Omega)}{T_r} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \tilde{a}_{\ell,m} Y_{\ell}^m(\Omega)$$

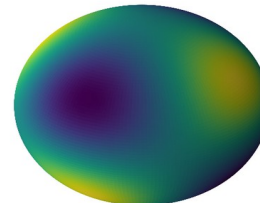
$$\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} Y_{\ell}^m Y_{\ell'}^{m'}{}^* d\Omega = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$$

Q, U

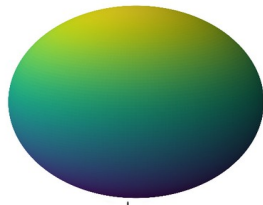
m=2,-2
l=2



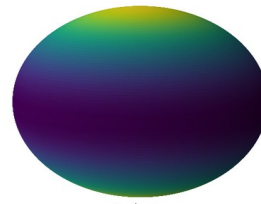
m=2,-2
l=3



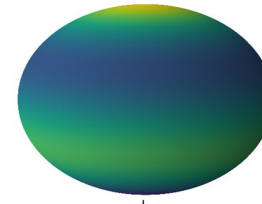
m=0
l=1



m=0
l=2



m=0
l=3



I

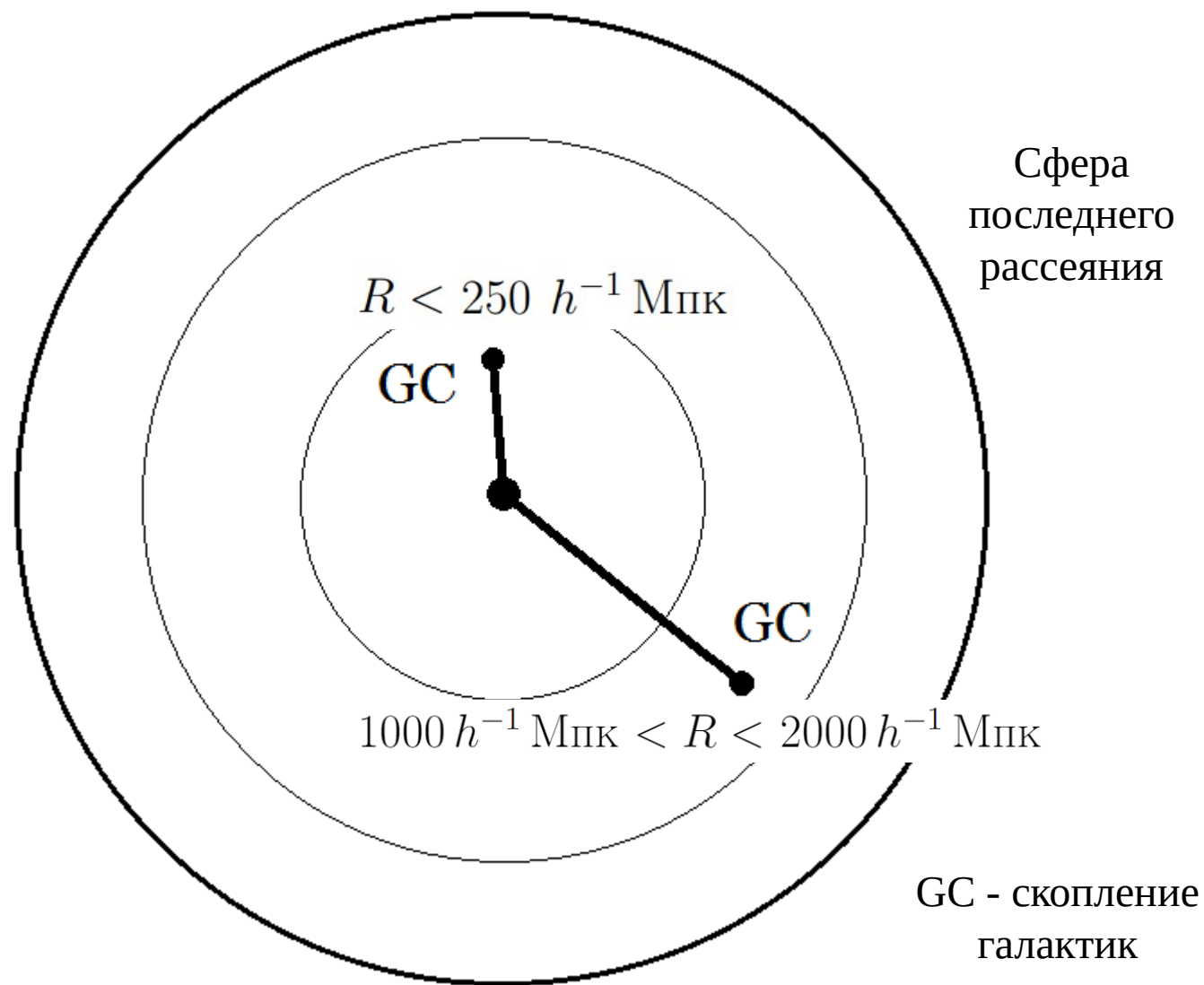
Только мультиполи с $l = 1, 2, 3$ вносят вклад

$$\beta_n = -\frac{3}{4\sqrt{\pi}} \left(\frac{4}{5\sqrt{3}} \tilde{a}_{1,0} - \frac{1}{3\sqrt{5}} \tilde{a}_{2,0} + \frac{1}{5\sqrt{7}} \tilde{a}_{3,0} \right) ,$$

$$\beta_q = \frac{3}{4\sqrt{5\pi}} \left(\tilde{a}_{2,2} - \frac{1}{\sqrt{7}} \tilde{a}_{3,2} \right) ,$$

$$\beta_u = \frac{3}{4\sqrt{5\pi}} \left(\tilde{a}_{2,-2} - \frac{1}{\sqrt{7}} \tilde{a}_{3,-2} \right) .$$

Эффект Сакса-Вольфа



Независимая оценка малых мультиполей анизотропии

$$\tilde{a}_{l,m}^j = \sum_{m'=-l}^l D_{l,j}^{m,m'} a_{l,m'}^j \approx \sum_{m'=-l}^l D_{l,j}^{m,m'} a_{l,m'},$$

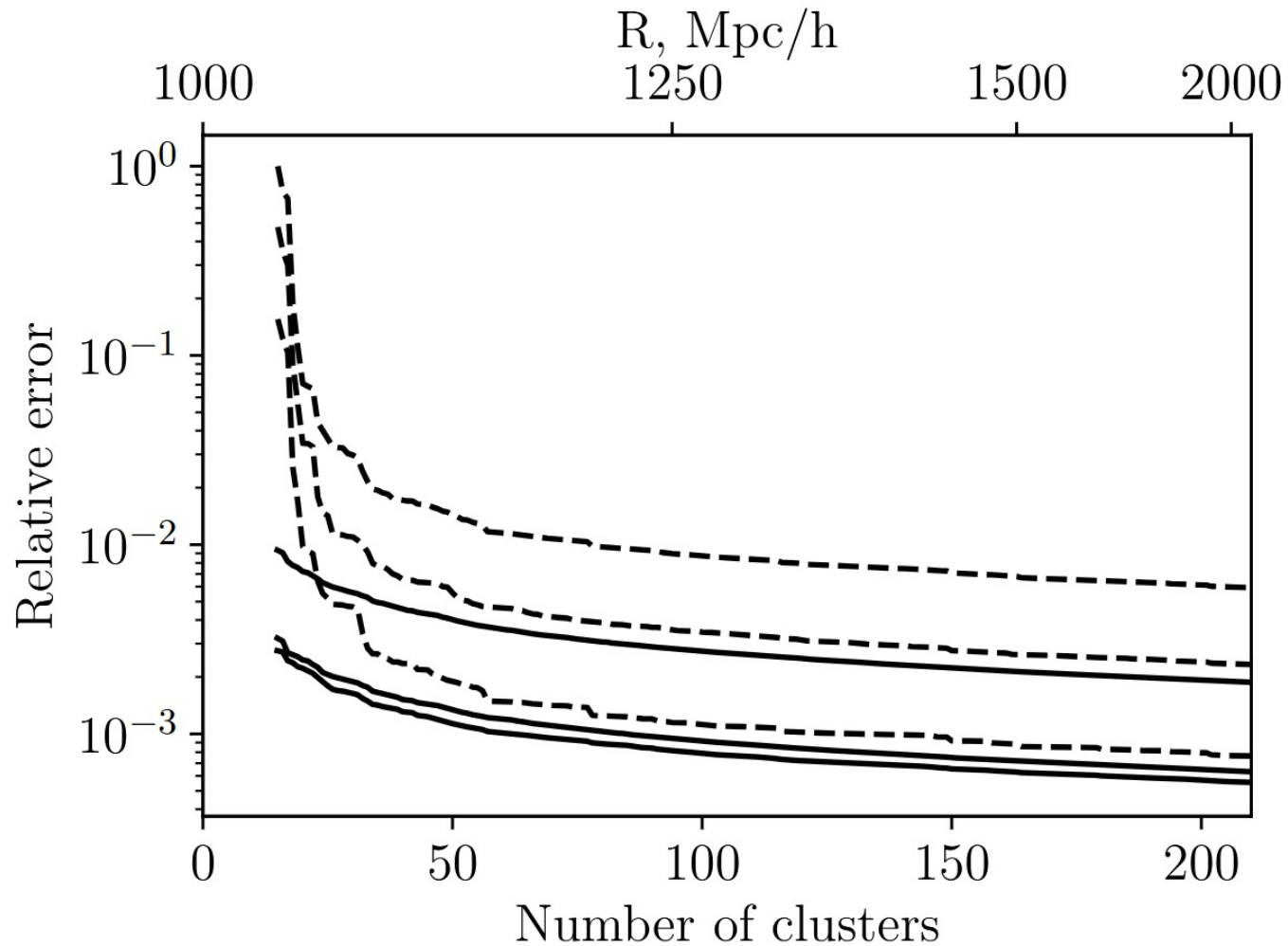
где $D_{l,j}^{m,m'}$ – комплексно-сопряжённые элементы D-матрицы Вигнера для j-го кластера. Эти элементы полностью задаются положением кластера j на небе.

$$\tilde{\beta}_n = -\frac{3}{4\sqrt{\pi}} \left(\frac{4}{5\sqrt{3}} \sum_{m=-1}^1 D_{1,j}^{0,m} a_{1,m} - \frac{1}{3\sqrt{5}} \sum_{m=-2}^2 D_{2,j}^{0,m} a_{2,m} + \frac{1}{5\sqrt{7}} \sum_{m=-3}^3 D_{3,j}^{0,m} a_{3,m} \right),$$

$$\tilde{\beta}_q = \frac{3}{4\sqrt{5\pi}} \left(\sum_{m=-2}^2 D_{2,j}^{2,m} a_{2,m} - \frac{1}{\sqrt{7}} \sum_{m=-3}^3 D_{3,j}^{2,m} a_{3,m} \right),$$

$$\tilde{\beta}_u = \frac{3}{4\sqrt{5\pi}} \left(\sum_{m=-2}^2 D_{2,j}^{-2,m} a_{2,m} - \frac{1}{\sqrt{7}} \sum_{m=-3}^3 D_{3,j}^{-2,m} a_{3,m} \right).$$

Ошибка определения амплитуд диполя, квадруполя и октуполя (снизу вверх)



Выводы главы I

- Рассмотрен поляризованный тепловой эффект Сюняева-Зельдовича и выведены в аналитическом виде весьма характерные компоненты спектральных искажений параметров Стокса, которые возникают ввиду наличия дипольной, квадрупольной и октупольной компонент в анизотропии реликтового излучения.
- Этот тип искажения может быть отделён от других компонент и использован для независимой оценки амплитуд $\ell = 1, 2, 3$ мультиполей и их ориентации.
- Наблюдая искажённое излучение от близлежащих кластеров, можно независимо оценить коэффициенты анизотропии реликтового излучения $a_{\ell,m}$, $\ell = 1, 2, 3$, $-\ell \leq m \leq \ell$ в нашем местоположении.
- Предложен метод разделения эффекта Сакса-Вольфа и интегрального эффекта Сакса-Вольфа путём объединения наблюдений искажённых сигналов от дальних и близлежащих кластеров.

Глава II

Отделение спектральных
искажений типа μ реликтового
излучения от фонов с плохо
определёнными формами спектра

Уравнение Компанейца

[A. S. Kompaneets, Sov. J. Exp. Theor. Phys. 4, 730 (1957)]

$$\nu^2 \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\sigma_T N_e h}{m_e c} \frac{\partial}{\partial \nu} \left[\nu^4 \left(n + n^2 + \frac{k T_e}{h} \frac{\partial n}{\partial \nu} \right) \right],$$

Two different asymptotics

1. If $t \gg \frac{m_e c}{\sigma_T N_e h}$ and $T_e > T$ for $t = 0$ then

$$n(\nu, t) = \left(e^{\frac{h\nu}{k T_e} + \mu} - 1 \right)^{-1}, \quad \mu \neq 0$$



μ - distortion

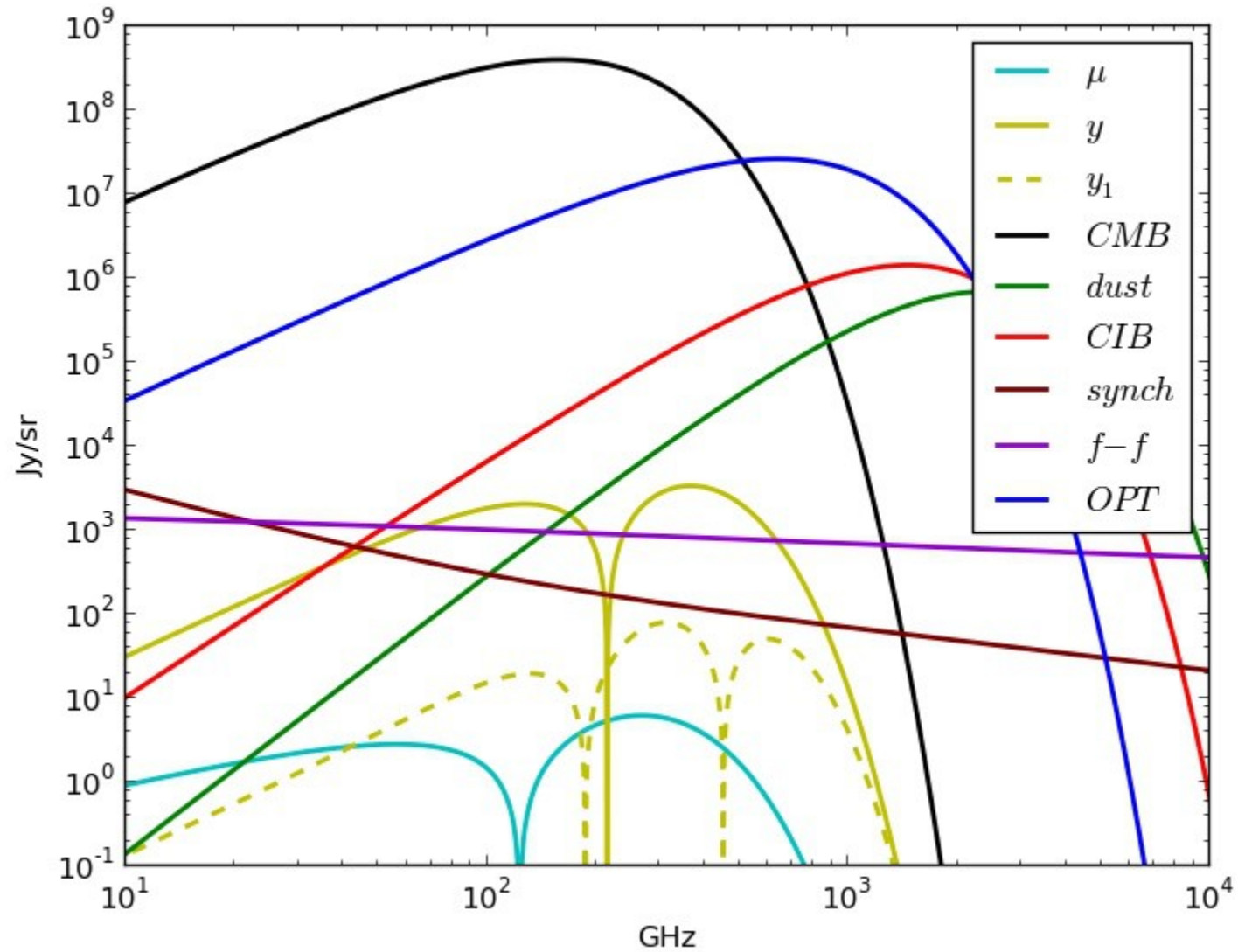
2. If $t \ll \frac{m_e c}{\sigma_T N_e h}$ and $n(\nu, 0) = \frac{1}{e^x - 1}$, $x = h\nu/kT_r$ then

$$n(\nu, t) - n(\nu, 0) = tk(T_e - T_r) \frac{\sigma_T N_e}{m_e c} \frac{x e^x}{(e^x - 1)^2} \left[x \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - 4 \right]$$



y -distortions (or SZ effect)

Сигнал и фоновые компоненты



Предположения

$$I_m^j(\nu) = \int_{\Omega} a_m(\mathbf{P}) f_m(\nu_j, \mathbf{P}) d\mathbf{P}, \quad d\mathbf{P} = dp_1 dp_2 \cdots dp_L.$$

$$1) \quad \int_{\Omega} |a_m(\mathbf{P})| d\mathbf{P} < A_m,$$
$$a_m(\mathbf{P}) = 0 \text{ for } \mathbf{P} \notin \Omega.$$

2) a_m не зависят друг от друга и не коррелируют

Описание алгоритма

$$S_j = a_\mu I_\mu^j + \sum_m I_m^j + N_j, \quad j = 1, \dots, J$$

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S}^T = \sum_{j=1}^J \omega_j S_j \rightarrow a_\mu \quad \text{для} \quad \sigma_j \rightarrow 0, \quad j = 1, \dots, J.$$

где σ_j — это шум в j -ом канале

$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S}^T = R(\mathbf{S})$ называется откликом на сигнал:

$$R(\mathbf{S}) = a_\mu R(\mathbf{I}_\mu) + R(\mathbf{F}) + R(\mathbf{N})$$

Описание алгоритма

$$1) \quad R(\mathbf{I}_\mu) = \sum \omega_j I_\mu^j = 1.$$

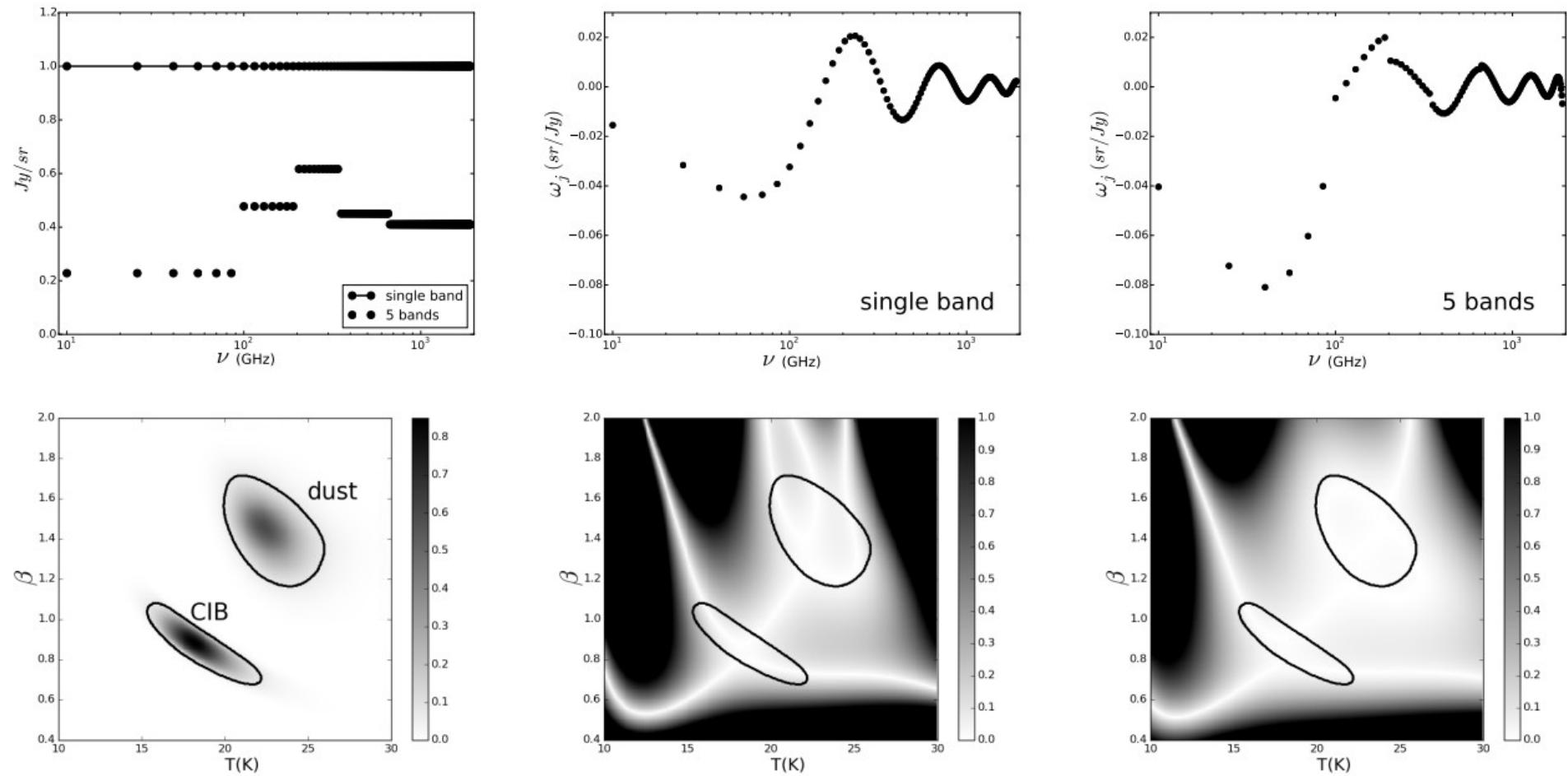
$$2) \quad \langle R^2(\mathbf{F}) \rangle < \sigma_{F,max}^2 = \sum_{i,j=1}^J \left[\sum_{m=1}^M A_m^2 q_{ij}^m \right] \omega_i \omega_j,$$

$$q_{ij}^m = \frac{1}{V_\Omega} \int_{\Omega} f_m(\nu_i, \mathbf{P}) f_m(\nu_j, \mathbf{P}) d\mathbf{P},$$

$$\langle R^2(\mathbf{N}) \rangle = \sum C_{ij} \omega_i \omega_j$$

$$Q = \sum_{i,j=1}^J \left[\sum_{m=1}^M A_m^2 q_{ij}^m + C_{ij} \right] \omega_i \omega_j, \quad \begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial \omega_j} = 0, & j = 2, \dots, J, \\ \omega_1 = \frac{1}{I_\mu^1} - \sum_{m=2}^J \omega_j \frac{I_\mu^j}{I_\mu^1}. \end{cases}$$

Отделение μ искажения от пыли и КИФ



Выводы главы II

- Представлен способ избавления от космических фонов с плохо определёнными спектральными характеристиками при измерении μ искажения.
- Основой этого подхода является алгоритм поиска специальных весов для частотных каналов.
- Сумма измерений сигнала с этими весами, называемая откликом, слабо чувствительна к наличию фонов с параметрами, лежащими в некотором предварительно оценённом диапазоне их возможных изменений. Отклик на фоны становится пренебрежимо малым по сравнению с откликом на сигнал μ искажения.

Глава III

Метод наименьшего отклика для
отделения спектральных искажений
реликтового излучения от фонов

MILC и LRM

$$R[I_\mu(\nu)] = 1,$$

$$R[f_m(\nu, \mathbf{P}_0)] = 0, \quad m = 1, \dots, M,$$

$$R \left[\frac{\partial^{n_1 + \dots + n_L}}{\partial P_1^{n_1} \dots \partial P_L^{n_L}} f_m(\nu, \mathbf{P}) \right]_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_0} = 0,$$

$$n_1 + \dots + n_L \leq n,$$

$$R^2[\mathbf{N}] \rightarrow \min$$

Метод с моментами (MILC)

$$R[I_\mu(\nu)] = 1,$$

$$\int_{\Omega} |a_m(\mathbf{P})| d\mathbf{P} < A_m,$$

$$a_m(\mathbf{P}) = 0 \text{ for } \mathbf{P} \notin \Omega$$

$$\sum_m A_m^2 R^2[f_m(\nu, \mathbf{P})] + R^2[\mathbf{N}] \rightarrow \min$$

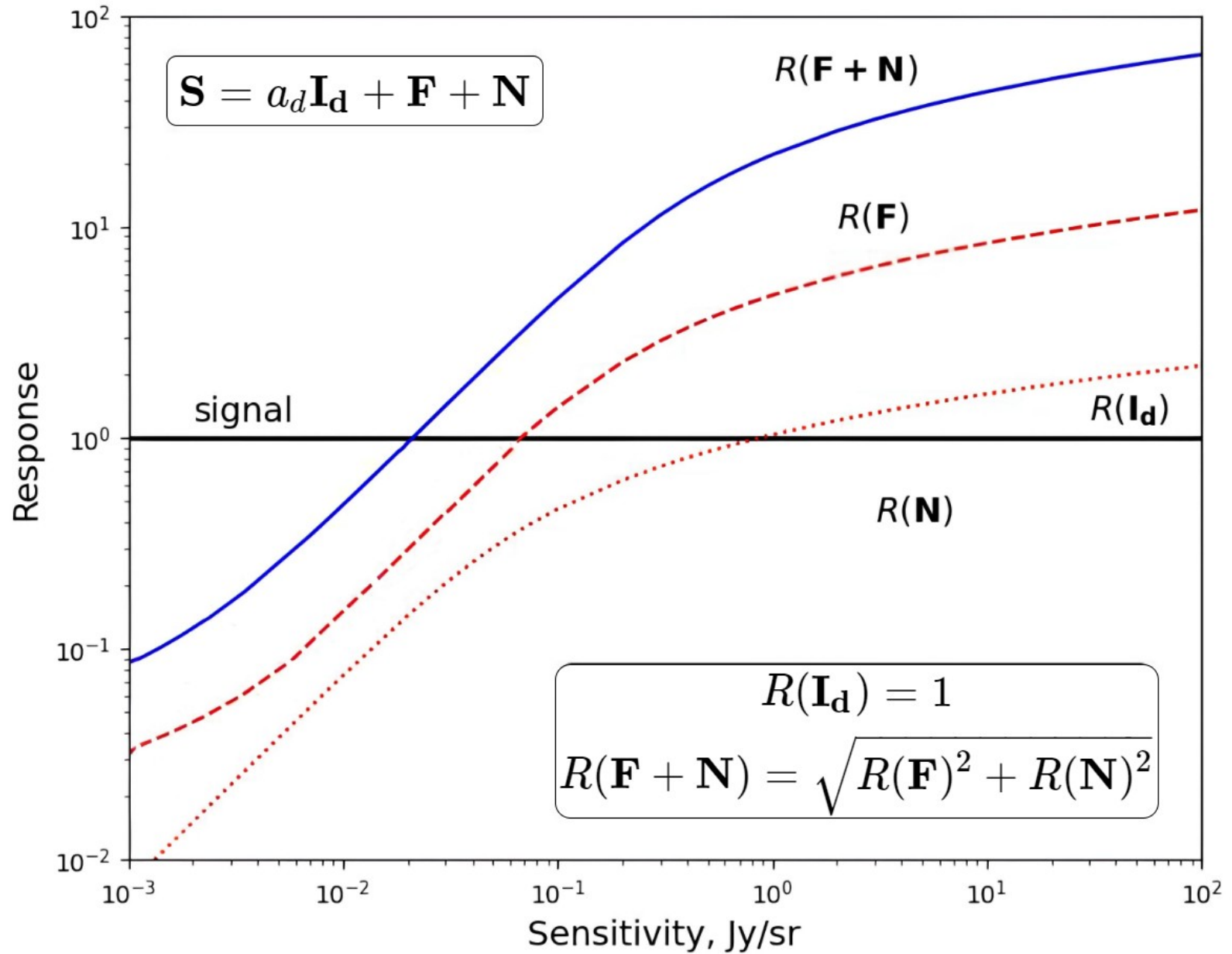
Метод наименьшего отклика (LRM)

[V. Stolyarov et al., *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 357, 145 (2005)]

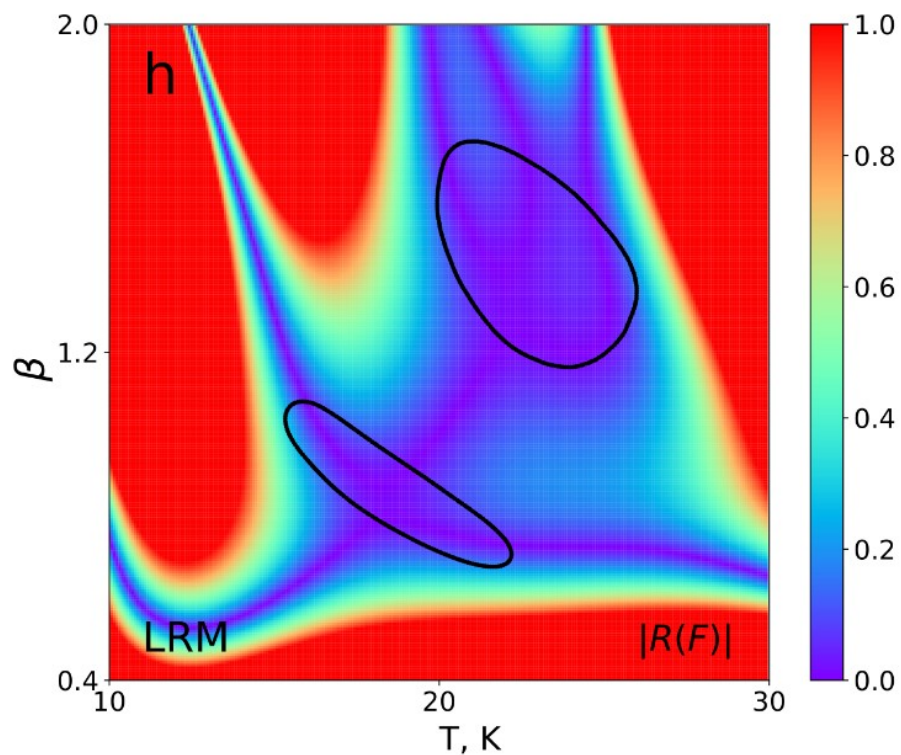
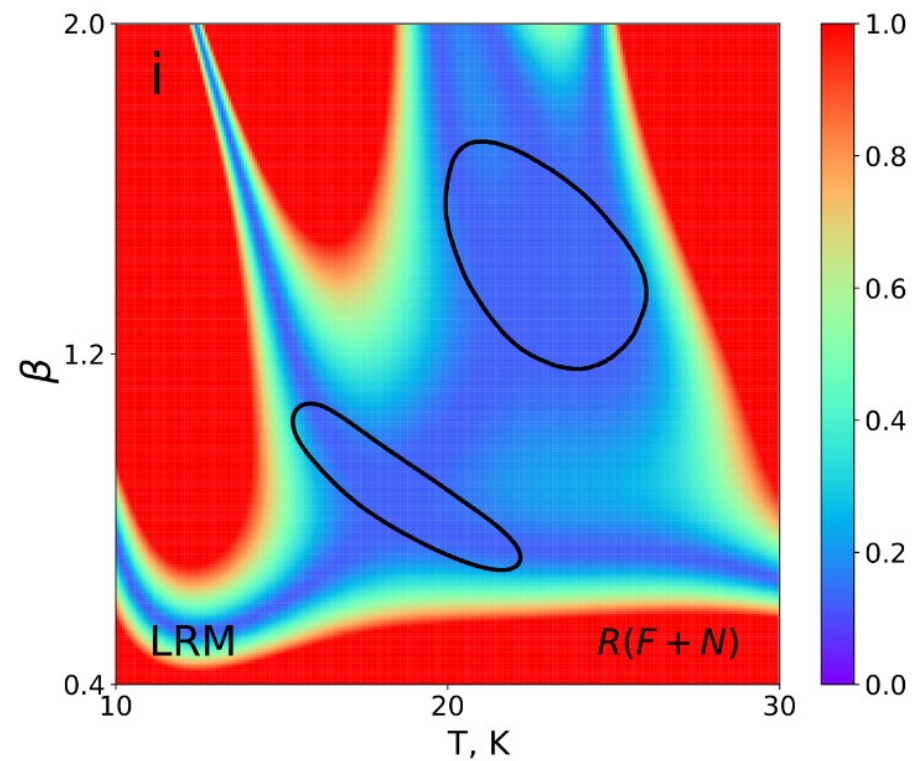
[J. Chluba et al., *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 472, 1195 (2017)]

[A. Rotti and J. Chluba, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 500, 976 (2020)]

Отклик



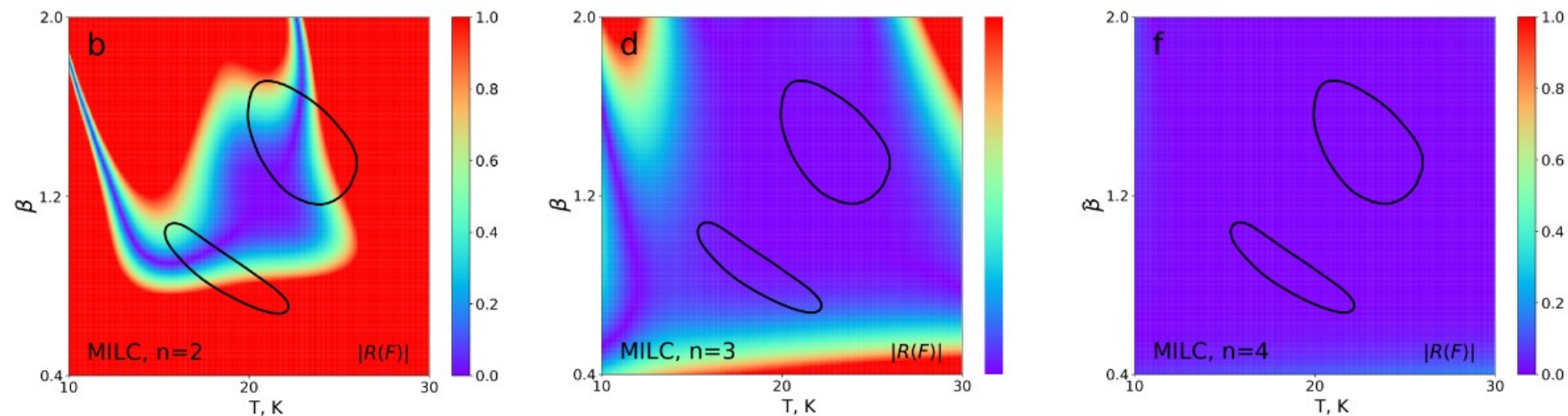
LRM



Красная область: $|R| > R(I_\mu) = 1$

MILC

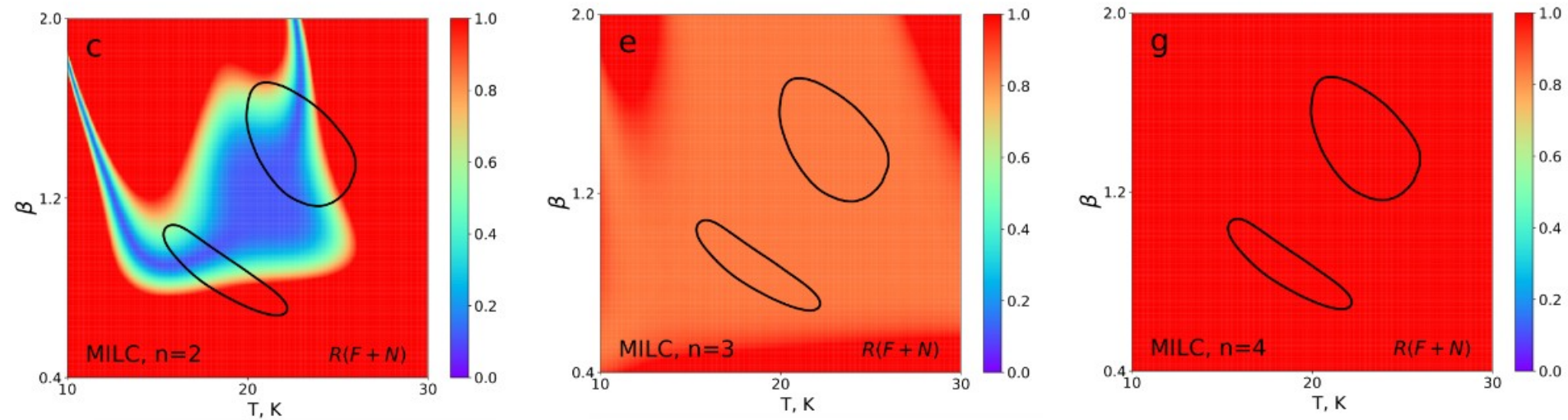
Верхний ряд: отклик на фон



$n = 2$

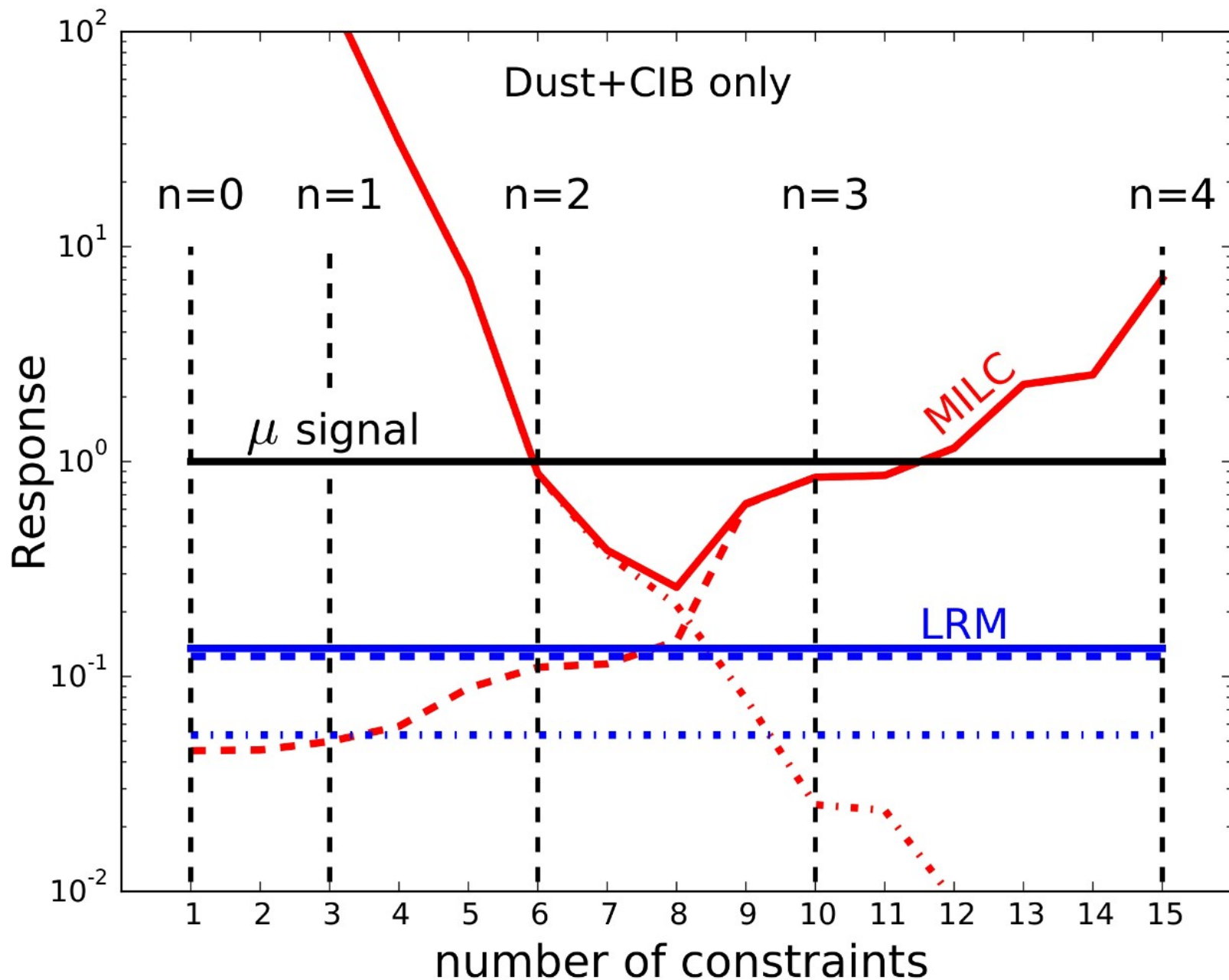
$n = 3$

$n = 4$

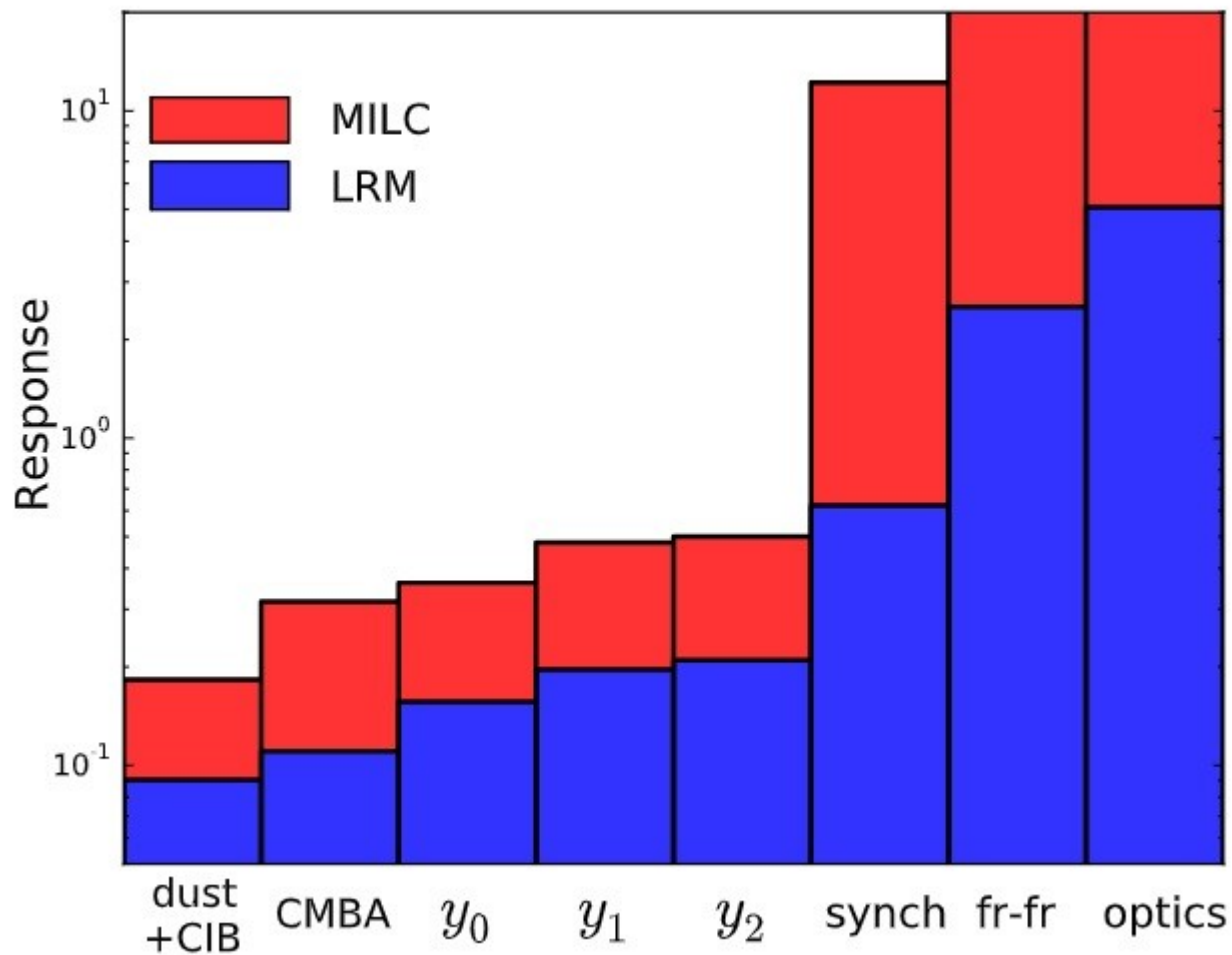


Нижний ряд: отклик на фон + шум

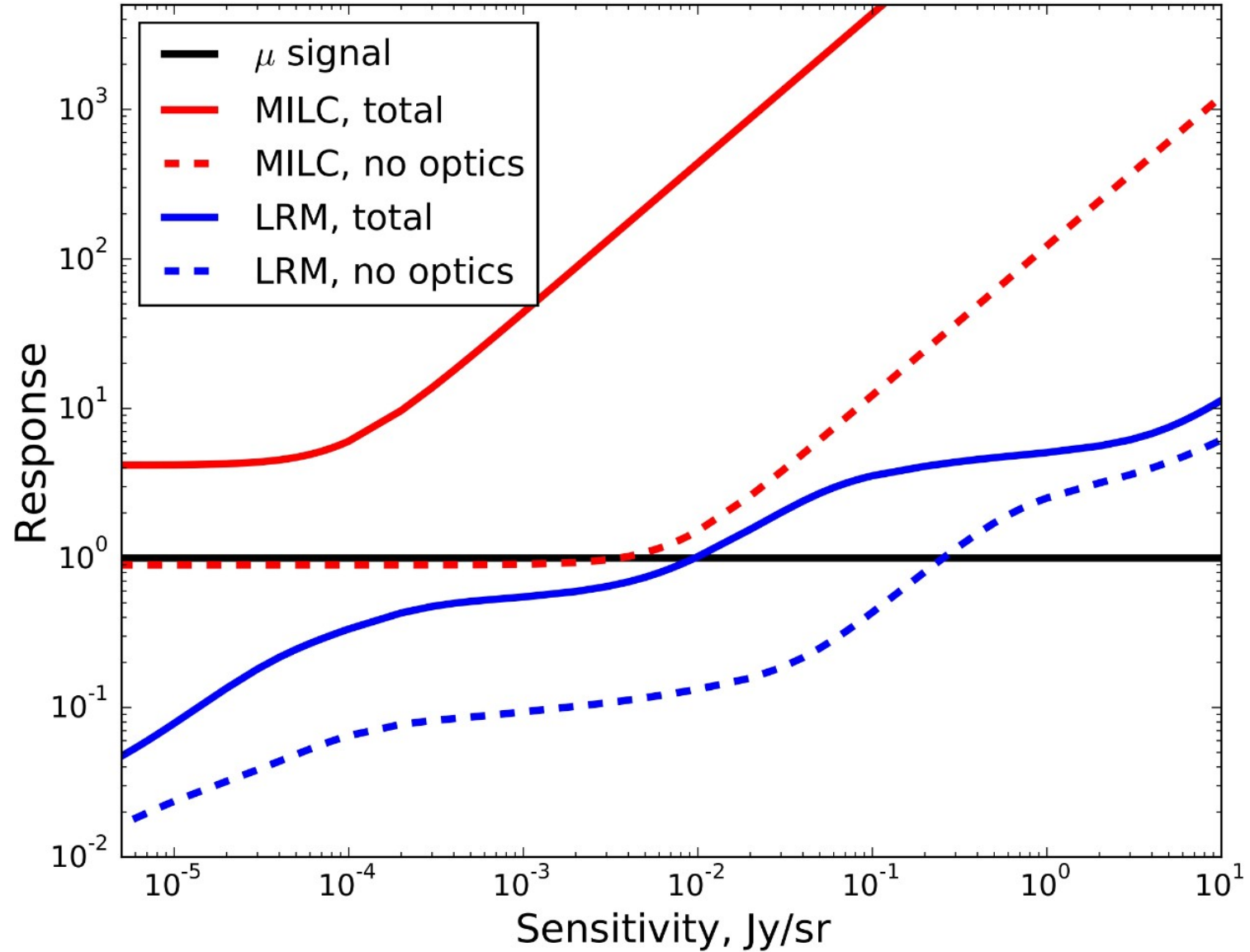
Отклик MILC зависит от числа условий



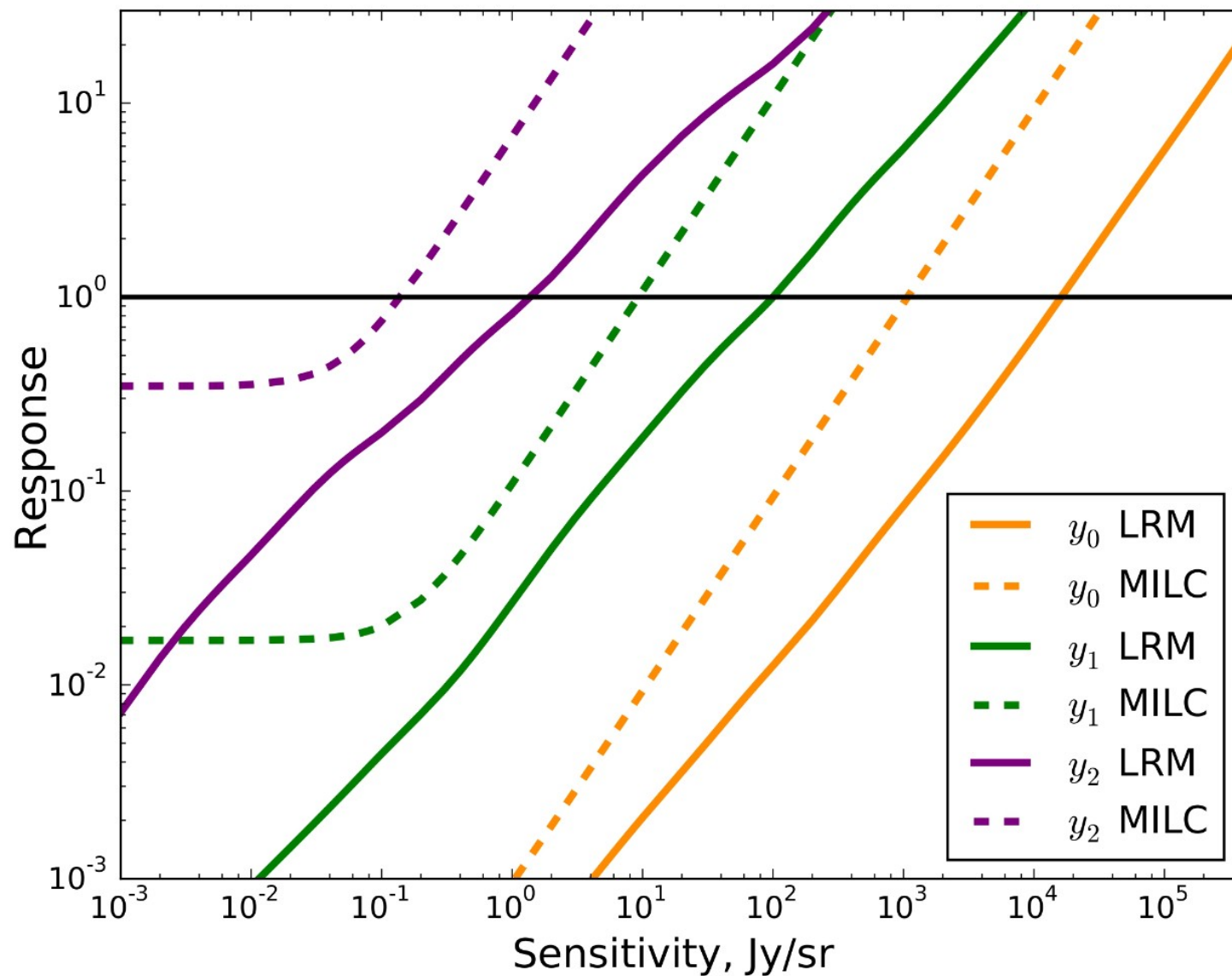
Последовательно добавляем фоны



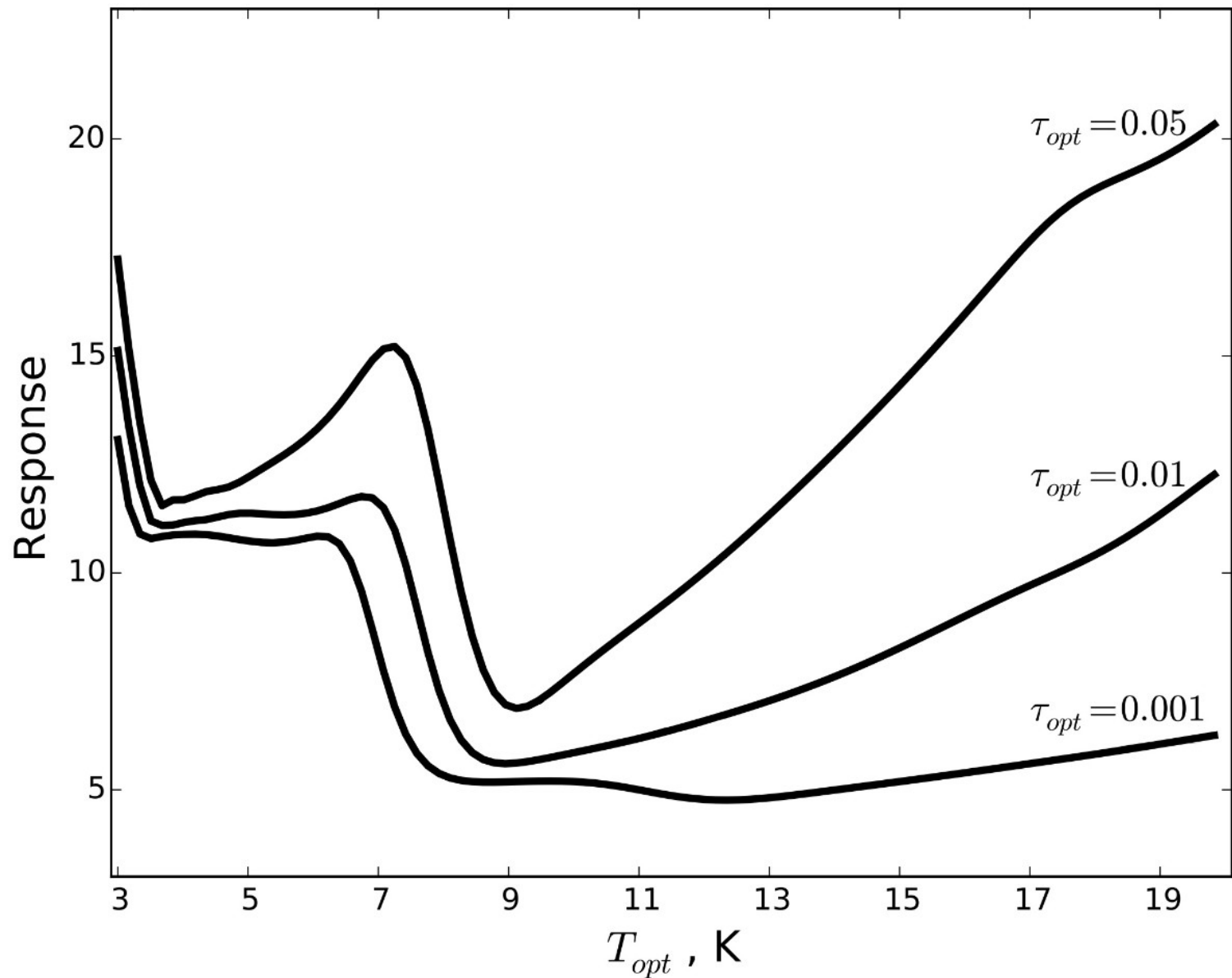
Отклик с учётом всех фонов



Выделение y из искажений



Оптимальная температура зеркала для измерения μ искажения ~ 9 К



Выводы главы III

- Для извлечения спектральных искажений был разработан алгоритм разделения искомого сигнала от фонов, ключевой особенностью которого является его слабая чувствительность к спектральным формам фоновых компонент.
- Сравнение методов MILC и LRM показало бо́льшую эффективность последнего.
- Добавление бо́льшего количества компонент увеличивает общий отклик для обоих методов. Но отклик на шум, полученный с помощью MILC, значительно превосходит результаты LRM.
- Установлено наличие оптимальной температуры для любого эксперимента, в котором измеряется монополярная часть μ искажений реликтового излучения.

Основные положения, выносимые на защиту:

- 1) Выведен особый вид спектральных искажений параметров Стокса реликтового излучения, рассеянного на скоплениях Сюняева-Зельдовича, названный анизотропным эффектом Сюняева-Зельдовича. С помощью этого эффекта можно, наблюдая близкие и удалённые скопления галактик, независимо оценить амплитуды и ориентации мультиполей $\ell = 1, 2, 3$ реликтового фона, а также разделить вклад в анизотропию от эффекта Сакса-Вольфа и интегрального эффекта Сакса-Вольфа. (Глава 1)
- 2) Разработанный новый метод наименьшего отклика (LRM) позволяет отделить искомые спектральные искажения типа μ и u от вкладов фонов галактического и внегалактического происхождения, включая вклад от оптики телескопа. Этот алгоритм создан для отделения фонов с плохо определёнными формами спектров от искомого сигнала. Он одновременно минимизирует вклад от фотонного шума и фонов со спектральными параметрами, лежащими внутри заранее определённой области их возможных изменений. Математически такой метод является оптимальным и работает лучше других актуальных методов (ILC, cILC, pcILC, mILC). (Глава 2, Глава 3)
- 3) Была найдена оптимальная температура оптической системы телескопа для любого эксперимента по измерению монопольной части μ искажений спектра реликтового излучения. Её значение составило 810 К. (Глава 3)

Список работ, опубликованных по теме диссертации:

[M1] Novikov D.I., Pilipenko S.V., De Petris M. , Luzzi G., Mihalchenko A.O., Stokes parameters spectral distortions due to the Sunyaev Zel'dovich effect and an independent estimation of the CMB low multipoles // Phys. Rev. D – 2020, Vol. 101, Issue 12, P. 510-520.

[M2] Novikov D.I., Mihalchenko A.O. Separation of CMB μ spectral distortions from foregrounds with poorly defined spectral shapes // Phys. Rev. D – 2023, Vol. 107, Issue 6, P. 506-515.

[M3] Maillard J. P., Mihalchenko A., Novikov D., Osipova A., Pilipenko S., Silk J. Least response method to separate CMB spectral distortions from foregrounds // Phys. Rev. D – 2024, Vol. 109, Issue 2, P. 523-536.

Другие публикации по теме диссертации

[Б1] Mihalchenko, A. O., Novikov, D. I. Disentangling CMB μ and y spectral distortions from foregrounds with poorly defined spectral shapes // arXiv e-prints – 2024, arXiv:2503.11358. (материалы конференции PASCOS 2024)

[Б2] Новиков, Д. И., Михальченко, А. О. Измерение химического потенциала Вселенной и искажений частотного спектра реликтового излучения как приоритетная задача космической обсерватории «Миллиметрон» // «Основные результаты научной деятельности ФИАН 2023» – 2024, С. 18-19.

Апробация работы

Результаты представлены в Российскую Академию Наук, а также отобраны для публикации в сборнике «Основные результаты ФИАН-2023» и «Основные результаты ФИАН-2024». По итогам конкурса молодёжных научных работ ФИАН в 2025 году циклу работ [М1], [М2], [М3] присуждена премия Д.В. Скобельцына.

Основные результаты диссертации представлялись и подвергались обсуждению на российских и иностранных конференциях и симпозиумах, а также на семинарах Астрокосмического центра ФИАН:

- 1) Семинар отдела теоретической астрофизики АКЦ ФИАН, Москва, Россия, 21 декабря 2020;
- 2) 65–я Всероссийская научная конференция МФТИ в честь 115-летия Л.Д. Ландау, МФТИ, Московская обл., Долгопрудный, Россия, 3–8 апреля 2023;
- 3) XXX Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов», МГУ, Москва, Россия, 10–21 апреля 2023;
- 4) PASCOS 2024: 29th International Symposium on Particles, String and Cosmology, ICISE, Куинён, Вьетнам, 7–13 июля 2024;
- 5) 3-я Международная конференция «Субмиллиметровая и миллиметровая астрономия: цели и инструменты», АКЦ ФИАН, Москва, Россия, 14–16 апреля 2024;

Спасибо за внимание!

1. ... **Т.е. достаточно ли ожидаемой инструментальной чувствительности [«Миллиметра»] при реалистичной программе наблюдений для детектирования спектральных искажений?**

Согласен. Во Введении урывками приведены оценочные характеристики для «Миллиметра» (н-р, стр. 13-14), но это стоило отдельно более чётко оговорить.

7. ... **Не очень удачно сформулировано, сложно понять, как в итоге полный диапазон делится на каналы [стр. 59].**

Да. Имеется в виду, что рассматриваются две конфигурации. Когда 128 каналов разделены на пять частотных диапазонов и, соответственно, нет. В случае разделения на пять диапазонов удаётся достичь лучшей чувствительности.

8. ... **Не объясняется, почему недостаточно учитывать только то, что мы наблюдаем, а именно спектральные вариации в зависимости от направления, а нужно ещё как-то оценивать вариации вдоль луча зрения.**

Параметры плохо определяемых фонов меняются вдоль луча зрения. Т.о. наблюдаемый от них спектр есть суперпозиция неизвестных нам фонов. Суть метода заключается именно в том, чтобы уничтожить вклад плохо определенного суммарного спектра фонов в общий сигнал.

9. **На стр. 67 было бы полезнее привести пример описания фона с реалистичным спектром, например, синхротронного со степенным, а не дельта-функции.**

Под дельта-функцией имеется в виду чётко определенное значение параметра, определяющего форму спектра (н-р, температура черного тела). Т.о. описываемый спектр реалистичный.

1. ... [Первая часть замечания]

До рассеяния падающее излучение частично поляризованно (приходит с поверхности последнего рассеяния). Однако параметры Стокса этого поляризованного излучения отличаются от чернотельного известным спектральным возмущением в форме первой производной чёрного тела по температуре (слагаемое в форме g_1 на слайде 7). Поэтому изначальная поляризация не мешает нам обнаружить спектральные искажения параметров Стокса, так как они имеют другую спектральную форму, нежели изначальное поляризованное излучение (основная идея первой главы).

2. ... [Вторая часть замечания]

Кинематический эффект СЗ не учитывался. В дальнейших исследованиях необходимо учитывать релятивистские поправки с тем, чтобы отличить его от анизотропного эффекта при рассмотрении всех трех параметров Стокса I, Q, U .

3. При обсуждении спектральных искажений реликтового излучения упомянуты почти все важные искажения, однако ничего не говорится о рекомбинационных линиях, которые неизбежно возникают в процессе первичной рекомбинации плазмы, на фоне которой и формируется анизотропия реликтового излучения. Да, пока что их не удалось задетектировать, но они точно есть и их величина хорошо известна, в отличие, например, от обсуждаемого μ -искажения, величина которого может быть сколь угодно мала.

Безусловно надо учитывать всё, однако все факторы одновременно учесть достаточно проблематично. Заметим, что μ не может быть сколь угодно малым (механизм Силковского затухания даёт нам оценку снизу для μ ; мы не знаем о других механизмах, но Силковское затухание известно). Рекомбинационные линии же по своей амплитуде ожидаются меньше, чем минимальное μ , поэтому их рассмотрением пришлось пока пренебречь. Аналогично рекомбинационными линиями пренебрегали при исследовании искажений и другие авторы (J. Chluba et al.).

- 1. В первой главе стоило бы подробнее обсудить потенциальные ограничения метода оценки мультиполей с помощью анизотропного эффекта СЗ, особенно в случае наличия эффектов, связанных пекулярным движением скоплений или вариациями температуры плазмы.**
В дальнейшем необходимо учитывать релятивистские поправки к кинематическому эффекту СЗ (пекулярные движения). Что касается вариации температуры плазмы, то ценность нашего исследования заключается именно в том, что отношение амплитуд a_{C3} к t_{C3} не зависит от свойств рассеивающей среды (температуры плотности).
- 2. ... Желательно было бы подробнее обсудить устойчивость метода при вариациях границ областей определения параметров.**
Чем больше область возможных изменений параметров фонов, тем сложнее измерять искомый сигнал. Тем не менее, метод устойчив и даже допускает пересечение областей изменения параметров нескольких различных фонов (н-р, пыли и КИФ)
- 3. Хотелось бы более подробно увидеть, как LRM может быть усовершенствован при использовании итерационного подхода.**
Хорошее замечание. Этот момент вскользь затрагивался в заключении, а в полной мере был реализован в отдельной статье, которая ещё ждёт публикации.
- 4. В работе предполагается, что фоновые компоненты (например, пыль и синхротронное излучение) не коррелируют между собой. Однако в реальных наблюдениях такие корреляции неизбежны. Их учёт необходим при обработке реальных наблюдений.**
Согласен. Во второй главе было сделано такое допущение. Однако в третьей главе (стр. 72) вводится параметр M , допускающий учёт корреляции (хоть для простоты используется модель некоррелированных фонов).
- 5. Желательно исследовать, как [оптимальная температура] зависит от других параметров.**
Оптимальная температура оптики телескопа практически не зависит от конфигурации прибора и излучающей способности зеркала. Это фактически универсальная константа, определяемая всего двумя вещами: T реликта и формой спектра μ искажений. В этом и состоит ценность полученного результата.
- 6. ... было бы уместно оценить производительность предложенного алгоритма в зависимости от объёма входных данных. Сложность такого рода алгоритмов упирается в решение СЛАУ и оборот матриц. Зависит от числа каналов J как $O(J^3)$.**